THESE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITE DE PARIS VII

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

BERNARD GAFFET

THEORIE DES COURBES DE LUMIERE DES SUPERNOVAE

SOUTENUE LE 21 AVRIL 1976 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. H. REEVES PRÉSIDENT

C. CESARSKY EXAMINATEURS

J. HEYVAERTS

J. LEQUEUX

A. OMONT

L. VALENTIN

THESE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITE DE PARIS VII

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

BERNARD GAFFET

THEORIE DES COURBES DE LUMIERE DES SUPERNOVAE

SOUTENUE LE 21 AVRIL 1976 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. H. REEVES	PRÉSIDENT
C. CESARSKY	EXAMINATEURS
J. HEYVAERTS	
J. LEQUEUX	
A. OMONT	
L. VALENTIN	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

RESUME

On pense généralement que l'explosion des supernovae de type II est la phase finale de l'évolution d'une étoile jeune, relativement massive, et qu'elle s'accompagne de la formation d'une étoile à neutrons (ou même d'un "trou noir" pour les plus massives). La théorie prévoit d'autre part qu'un pulsar ayant une énergie de rotation égale à l'énergie dégagée par l'explosion, soit quelques 10^{51} ergs, doit rayonner sous forme d'ondes électromagnétiques une puissance de l'ordre de 10^{43} ergs/s, ce qui correspond au pic de luminosité des SN II. Ostriker et Gunn (1971) ont suggéré que l'explosion d'une supernova est en fait provoquée par la pression du rayonnement du pulsar, ce qui permet d'interpréter cette coïncidence numérique. Bodenheimer et Ostriker (1974) ont calculé les courbes de lumière qui résultent de cette hypothèse mais ne parviennent pas à reproduire la forme des courbes observées.

Cependant, ces auteurs ont admis implicitement dans leur calcul que l'énergie rayonnée par le pulsar (sous forme d'ondes électromagnétiques de très basse fréquence) était immédiatement absorbée et transformée en chaleur: cette hypothèse peut ou non être correcte, et doit être discutée suivant les conditions physiques du milieu — en particulier sa température et sa densité.

Nous avons ainsi été conduits à faire une étude hydrodynamique de l'expansion de la supernova et en particulier de l'expansion de la cavité centrale produite par la pression du rayonnement. Les résultats principaux sont les suivants en ce qui concerne la phase de luminosité optique, soit quelques mois après l'explosion :

1) Le processus d'absorption ordinaire – l'effet Joule dans l'enveloppe éjectée, qui est presque complètement ionisée – est ici inefficace du fait de la grande densité du milieu et de sa grande conductivité.

2) Cependant, un autre processus d'absorption est possible, car les ondes rayonnées par le pulsar sont des ondes "fortes" et sont donc capables d'accélérer les charges présentes dans la cavité jusqu'à une énergie relativiste. L'efficacité de ce processus dépend très fortement de la température pour des raisons d'équilibre d'ionisation dans l'enveloppe de supernova, et elle passe pratiquement de 0 à 1 lorsque la température décroît de 14000 à 12000 K. Nous avons admis que les charges présentes dans la cavité y sont introduites sous forme d'atomes neutres et ne sont accélérées qu'au moment où elles sont ionisées par le rayonnement thermique ambiant.

Cette théorie établit ainsi un lien entre les propriétés accélératrices des pulsars – et par conséquent le rayonnement cosmique galactique – et la luminosité optique des supernovae. Il faut noter que dans les phases ultérieures de l'évolution ($t \gtrsim 1$ an) la supernova est optiquement mince et devient incapable d'assurer le freinage par ionisation des rayons cosmiques produits; à partir de ce moment le pulsar cesse son rôle de source de lumière et devient uniquement source de rayonnement cosmique.

Les courbes de lumière que nous avons ainsi calculées reproduisent bien la forme des courbes observées tout en utilisant des valeurs des paramètres (masse, vitesse d'expansion, luminosité au pic) voisines des valeurs généralement acceptées; en particulier, la croissance rapide de luminosité précédant le maximum est bien reproduite. Nous avons

également étudié le spectre continu et nous obtenons des températures de couleur correspondant bien aux observations récentes – en particulier, $T_c \simeq 1.0_{\bullet} 10^4$ K à l'époque du pic de luminosité.

Le problème de transfert de rayonnement dans une supernova est en principe très complexe, puisqu'il s'agit d'un milieu en expansion différentielle et que les conditions du transfert sont loin d'être stationnaires; cependant le problème se simplifie considérablement du fait que la principale source d'opacité est la diffusion Thomson; en outre l'épaisseur optique est assez grande (de l'ordre de quelques dizaines) et on ne s'intéresse pas à la distribution angulaire du flux émergent de sorte que le problème se réduit à un problème de diffusion, que nous avons essayé de traiter par des méthodes analytiques dans la mesure du possible.

Dans la deuxième partie. nous étudions une interprétation possible de la forme particulière du spectre X et γ diffus. Rocchia et al, (1975) ont proposé d'expliquer les singularités à 20 keV et 2 MeV par l'effet de la diffusion Compton sur un spectre plus régulier à la source. Cette hypothèse impliquerait une épaisseur de matière de l'ordre de quelques dizaines de g/cm^2 autour des sources, soit une épaisseur comparable à celle qu'on trouve autour de sources X telles que le pulsar Sco X1 ; il est cependant plus vraisemblable que ces sources soient des noyaux de galaxies ou des quasars, car les sources X galactiques telles que Sco X1 ont un spectre trop mou et ne peuvent contribuer au fond diffus.

Le problème de théorie cinétique posé par la diffusion Compton de photons d'énergie quelconque a été traité par Dreicer (1964) qui donne la forme générale des équations mais ne résoud pas le problème

de transfert qui se pose lorsque le milieu possède une surface libre par où les photons peuvent s'échapper. Nous avons étudié ce cas et traité ce problème de transfert en l'appliquant au cas de milieux à symétrie plane ou sphérique. Partant d'un spectre à la source en loi de puissance, la diffusion Compton a essentiellement pour effet de "creuser" le spectre dans la région de 20 keV à 10 MeV, la chute maximum d'intensité étant par exemple d'un facteur 5 pour une épaisseur optique $\tau_0 = 4$ (elle dépend peu de l'indice spectral de départ).

Il est intéressant de constater que les changements de pente introduits par l'effet Compton se produisent à des énergies qui dépendent peu des paramètres du problème et qui sont très voisines des énergies où on les observe dans le fond diffus : environ 20 keV et 2 MeV. L'effet Compton peut ainsi expliquer entièrement les déformations observées dans le fond du ciel X et γ.

Dans la troisième partie nous étudions les sections efficaces de réaction nucléaire (σ_R) proton-noyau, qui sont un des paramètres fondamentaux dans les théories de propagation du rayonnement cosmique. De nombreux travaux ont déjà été consacrés à ce problème, en particulier parmi les plus récents, ceux de Juliusson (1975) et Meyer (1975) ; cependant ils se limitent généralement à l'étude des hautes énergies ($E \gtrsim 1$ GeV/N) et d'autre part les formules données ne s'appliquent en général pas aux noyaux très légers, dont le comportement (géométrie, énergie de liaison) ne varie pas régulièrement en fonction de la masse A.

Ces analyses ont généralement pour point de départ le modèle de sphère semi-transparente ("cloudy cristal ball"), ce qui conduit à la formule de Bethe et Fernbach à la limite de haute énergie —l'Optique

géométrique étant alors utilisable – ou au "modèle optique" proprement dit lorsqu'on traite le problème quantiquement.

Notre but a été d'introduire des paramètres physiques dans la théorie de façon à réduire au minimum le nombre de paramètres libres ; en outre une formule d'extrapolation construite sur des paramètres ayant une signification physique précise est a priori plus fiable qu'une formule basée sur un simple calcul d'optimisation.

Dans une première analyse nous utilisons la formule de Bethe et Fernbach, en tenant compte des données expérimentales sur les rayons nucléaires ; nous déterminons la fonction K(E) qui représente l'opacité de la matière nucléaire pour des protons d'énergie E. Notre hypothèse est que K(E) est une fonction universelle, indépendante du noyau considéré.

La méthode est généralisable au cas où les projectiles ne sont plus des protons mais des noyaux quelconques ; dans une première approximation on admet que l'opacité K(E) conserve la même forme en fonction de l'énergie par nucléon E/N que dans le cas des protons.

Le modèle optique permet une analyse plus fine, tout d'abord du fait que le calcul classique devient incorrect à basse énergie ; en outre il permet de faire le lien entre la diffusion élastique, qui est bien connue expérimentalement, et les sections efficaces de réaction , qui sont souvent assez mal connues. On a pu déterminer ainsi (Becchetti et Greenlees, 1969) que la distribution du potentiel imaginaire W(r) – qui correspond à l'opacité K(r) dans le modèle optique – n'est pas plate comme nous l'avons supposé jusqu'ici ; en particulier, à basse énergie, l'opacité a tendance à se concentrer au voisinage de la surface du noyau, la région centrale étant relativement transparente.

Nous avons analysé de cette façon les données dans le domaine des énergies moyennes (10 à 60 MeV) où les sections efficaces varient le plus, et déterminé la forme du potentiel optique $W(r, E, A, \xi)$, incluant l'influence – souvent importante – du "nombre de symétrie" (ou excès de neutron) $\xi = (N-Z)/A$. Cette paramétrisation fournit en principe les sections efficaces de réaction des noyaux de masse $A \geq 12$ avec une bonne précision entre 10 et 60 MeV ; au-delà de 60 MeV ou de 100 MeV la formule de Bethe-Fernbach est suffisante et d'ailleurs les sections efficaces varient très peu.

Il est à noter que la formule de Bethe-Fernbach est très souvent utilisée de façon incorrecte, de nombreux auteurs pensant tenir compte des corrections quantiques en substituant $\pi(R+\lambda\!\!\!^{-})^2$ à la section géométrique πR^2 ; ceci peut être correct pour la section efficace totale, incluant la diffusion élastique, mais c'est certainement faux en ce qui concerne les sections de réaction σ_R.

D'autre part , cette étude nous a conduit à une estimation du potentiel imaginaire de volume W_o nettement plus élevée que celles qu'on admet généralement dans le modèle optique, en particulier aux faibles énergies (15 MeV et 30 MeV). Le potentiel W_o serait ainsi ramené à des valeurs plus proches de celles qui sont prévues par la théorie de Goldberger (1948). Ce point de vue semble confirmé par un article récent (Agrawal et Sood, 1975) qui indique également des valeurs élevées de l'absorption de volume W_o .

TABLE DES MATIERES

Première partie : Courbes de lumière des supernovae.

INTRODUCTION

I/ Les modèles théoriques de supernovae

1) Notions élémentaires. Phases successives de l'expansion.
2) Modèles faisant intervenir le transport de rayonnement par diffusion ou par onde de choc.
3) Modèle de fluorescence de Morrison et Sartori.
4) Théories faisant appel à l'énergie rayonnée par un pulsar.

II/ Description du modèle proposé

1) Mécanisme d'accélération des ions et influence de la température sur l'absorption des ondes de basse fréquence.
2) Description et principales caractéristiques du modèle.
3) Principe du calcul de la courbe de lumière.
4) Principe de la détermination du spectre continu. Facteur de dilution.

CONCLUSION

Appendices I et II : "Pulsar theory of supernova's light curves" par B. Gaffet, à paraître dans "Astrophysical Journal"

Appendice III : "Explosions et courbes de lumière de supernovae" , par B. Gaffet, à paraître dans le "Journal de Physique"

Deuxième partie : Déformation du spectre X et γ diffus par effet Compton.

Appendice IV : "Spectrum and origin of X and γ ray diffuse background" par R. Rocchia, R. Ducros et B. Gaffet, à paraître dans "Astrophysical Journal"

Troisième partie : Etude des sections efficaces de réaction proton-noyau à moyenne et à haute énergie.

Introduction

I/ Données expérimentales sur les rayons nucléaires

1) Distributions de charge obtenues par la diffusion d'électrons.

2) Distribution des neutrons et densité de matière.

II/ Interaction effective nucléon-nucléon. Théorie de Goldberger.

1) Notions sur les sections efficaces nucléon-nucléon.

2) Théorie de Goldberger des sections de réaction nucléon-noyau.

3) Opacités prévues par la théorie de Goldberger.

4) Calcul des rayons d'absorption.

III/ Analyse semi-classique des sections de réaction à haute énergie.

1) Etude préliminaire.

2) Résultats.

IV/ Le modèle optique de la diffusion élastique proton-noyau

1) Formalisme.

2) Les étapes du développement du modèle.

3) Extension du modèle optique aux noyaux légers (O, C, Li, Be, B)

V/ Analyse optique des sections efficaces de réaction aux énergies moyennes. Influence de l'excès de neutrons (N-Z)/A .

1) Analyse optique élémentaire pour les noyaux du fond de la vallée de stabilité.

2) Détermination des paramètres du potentiel optique et des sections efficaces de réaction en fonction de (N-Z)/A.

3) Conclusion.

INTRODUCTION

On sait qu'une étoile de masse supérieure à la limite de Chandrasekhar M_c – environ 1.4 $M_\odot$ – n'est pas stable et doit s'effondrer sur elle-même pour former une singularité prévue par la Relativité Générale, un "trou noir". Ces étoiles peuvent cependant rester longtemps en état de quasi-équilibre hydrostatique grâce à la chaleur dégagée au cours des différentes étapes de fusion et de nucléosynthèse, la pression thermique équilibrant la force de gravitation ; l'effondrement gravitationnel peut ainsi être retardé jusqu'au moment où tous les combustibles sont épuisés.

L'énergie dégagée par l'implosion est énorme, de l'ordre de l'énergie de repos Mc^2 , soit 10^{54} ergs ; elle produit l'éjection des couches externes de l'étoile, dont la chute vers le centre est encore très lente au moment de l'implosion. Seule une petite fraction de l'énergie totale – 10^{49} à 10^{50} ergs – est finalement rayonnée sous forme lumineuse à travers cette enveloppe en expansion, mais cela suffit à rendre la supernova presque aussi brillante – quelquefois même plus brillante – que l'ensemble de toutes les autres étoiles de sa galaxie.

Cette description schématique – d'après Burbidge, Burbidge, Fowler et Hoyle (1957) – n'est bien sûr qu'une possibilité parmi d'autres, car on ne connaît pas encore avec précision la nature des supernovae ; de nombreuses variantes sont possibles : ainsi, le trou noir peut être remplacé par un pulsar, ou étoile à neutrons, de masse inférieure à M_c ; d'autre part, d'autres phénomènes catastrophiques très énergétiques (10^{51} ergs) peuvent avoir lieu au cours de l'évolution

stellaire avant la phase d'effondrement : notamment la fusion explosive du Carbone, qu'on pense devoir se produire dans le coeur dégénéré des étoiles de 4 à 8 $M_\odot$.

On observe effectivement dans des galaxies extérieures des étoiles temporaires visibles seulement pendant quelques mois, dont la luminosité à l'époque du maximum est comparable à la luminosité totale de la galaxie. Leur magnitude absolue est de l'ordre de -18 , contre -6 ou -7 seulement pour les novae ; Zwicky et Baade (1934) leur ont donné le nom de "supernovae". Hartwig a été le premier à en observer une (S Andromedae) en 1885, dans la nébuleuse d'Andromède (M 31).

Dix supernovae environ ont été découvertes entre 1885 et 1920 (un spectre a pu être obtenu pour la supernova Z Centauri (1895), qui était 5 fois plus brillante que sa galaxie, NGC 5253). On en déduit un taux de 1 supernova tous les 1000 ans par galaxie, et de 1 SN tous les 300 ans dans les galaxies "brillantes" (voir Shklovsky, 1968). Les données récentes indiquent cependant un taux plus élevé, de 1 SN tous les 30 ou 100 ans.

En 1933 , Zwicky entreprend un programme de recherche systématique de supernovae ; 12 SN sont ainsi observées entre 1936 et 1939 ; interrompu en 1939 , ce programme est repris dans les années 50 et 82 SN sont découvertes entre 1956 et 1963. D'après Zwicky, l'utilisation permanente du télescope employé permettrait de découvrir une centaine de SN par an.

Ces recherches ont mis en évidence l'existence de deux catégories de supernovae, qui se distinguent essentiellement par leur type spectral. Les raies spectrales sont très élargies par l'effet Doppler car la vitesse d'expansion est de l'ordre de 10000 km/s, de sorte que l'identification des raies est souvent impossible ou incertaine . Les

spectres sont cependant très caractéristiques de chaque type; en particulier les raies de l'Hydrogène sont toujours présentes dans les SN de type II, et au contraire absentes dans les SN de type I.

Les SN I sont également caractérisées par leur courbe de luminosité, dont la forme varie peu d'une supernova à l'autre (voir fig 1,3, les courbes de lumière des SN II sont beaucoup plus variées (fig 2), et il est possible qu'elles forment en réalité plusieurs classes. Zwicky (1965) distingue 5 classes de supernovae : SN 93, observée en 1961 dans NGC 4303 est ainsi classée SN III ; son spectre ressemble à celui d'une SN II mais sa masse est probablement beaucoup plus grande que celle des SN II ordinaires. Les SN IV ont un spectre voisin de celui des supernovae de type I et sont représentées par une supernova apparue dans NGC 3003 . Les SN V correspondent aux objets tels que η Carinae (Argo Navis), qui a explosé en 1843 ; leur spectre ressemble à celui des novae mais la masse éjectée est beaucoup plus grande ; ce ne sont peut-être pas de véritables supernovae car la luminosité maximum est relativement faible ($\sim 10^{40}$ ergs/s) et surtout la nébuleuse éjectée ne forme pas une source radio non thermique.

Le fait que les SN II n'apparaissent que dans des galaxies contenant du gaz – les spirales Sb et Sc – tandis que les SN I sont observées également dans les galaxies elliptiques indique que ce sont des objets jeunes, de masse relativement élevée. Les SN I pourraient être de vieilles binaires serrées formées d'une naine blanche et d'une géante rouge, toutes deux de faible masse ($M \lesssim 1\ M_\odot$) ; l'accrétion de matière par la naine blanche déclencherait l'explosion , au moment où sa masse dépasserait la limite de Chandrasekhar.

D'après l'étude statistique de Gunn et Ostriker (1970), les pulsars

ont probablement pour origine des étoiles de population I , de masse $M \geqslant 4\ M_\odot$; Ostriker et Gunn (1971) proposent de les associer aux supernovae de type II, qui correspondent à la même catégorie d'étoiles d'après Shklovsky (1968) . L'explosion d'une SN II s'accompagnerait donc de la formation d'un pulsar, animé d'une énergie de rotation qui peut être considérable. En rayonnant ultérieurement cette énergie le pulsar pourrait jouer un rôle primordial dans la luminosité et l'évolution de la supernova.

Origine de la lumière rayonnée par les supernovae.

Colgate et White (1966) ont montré que la chaleur dégagée par l'explosion est très probablement insuffisante pour expliquer la luminosité d'une supernova car l'expansion adiabatique refroidit très rapidement le système; une source de chaleur supplémentaire est donc nécessaire. Ostriker et Gunn (1971) remarquent qu'un pulsar en rotation rapide – $\Omega = 10^3$ à 10^4 s^{-1} – produit un rayonnement électromagnétique intense et constitue une source de chaleur suffisante; dans leur modèle l'énergie du pulsar est si grande que l'explosion de la supernova est elle-même provoquée par la pression du rayonnement du pulsar. Bodenheimer et Ostriker (1974) ont calculé les courbes de lumière en admettant que toute l'énergie rayonnée par le pulsar est convertie en chaleur, mais leurs résultats sont assez éloignés des courbes de lumière typiquement observées (fig.5).

Nous proposons ici un modèle dans lequel le pulsar a une énergie plus modeste et ne contribue que faiblement à l'énergie d'expansion de la supernova ; toute l'énergie d'expansion est fournie au cours d'une brève explosion initiale, de la façon décrite par Colgate et White; on s'affranchit ainsi des difficultés du modèle d'Ostriker et

Gunn, qui prévoit toujours des vitesses d'expansion trop faibles.

L'hypothèse suivant laquelle l'énergie rayonnée par le pulsar est immédiatement convertie en chaleur est également discutable. Un calcul simple montre en fait que au début de l'expansion les ondes rayonnées par le pulsar sont très peu absorbées; elles s'accumulent dans une cavité creusée au centre de la supernova et peuvent être réfléchies un grand nombre de fois au bord de la cavité, qui est limitée par un plasma très conducteur.

Ces ondes peuvent cependant être absorbées en accélérant des ions présents dans la cavité,de la façon indiquée par Kulsrud, Ostriker et Gunn (1972); ces ions sont ensuite freinés par ionisation dans l'enveloppe où leur énergie cinétique est transformée en chaleur. Les ions sont injectés dans la cavité à partir de l'enveloppe, et leur pénétration dans la cavité dépend de leur potentiel d'ionisation ; l'absorption dépend donc très fortement de la température . Nous avons calculé qu'elle ne devient importante qu'en dessous de 14000 K environ.

Nous avons obtenu ainsi des courbes de lumière dont la forme du pic correspond bien aux formes typiques de SN II ; les paramètres que nous avons choisis sont tout-à-fait compatibles avec les données : masse éjectée 2à3 $M_\odot$, vitesse d'expansion 10^4 km/s , luminosité maximum 6. 10^{42} ergs/s , énergie cinétique totale 2. 10^{51} ergs , luminosité intégrée $\int L\, dt = 1.0 . 10^{49}$ ergs. Nous avons également calculé le spectre continu, et les températures de couleur $T_c(B-V)$ correspondantes sont également en accord qualitatif avec les observations : la température calculée T_c vaut 1.0 . 10^4 K au pic de luminosité et décroît ensuite rapidement, atteignant 5000 K après une ou deux semaines.

Légende des figures

Fig. 1 et 2 : Courbes de lumière de SN I et de SN II, d'après Minkowski(1964).

Fig. 3 : D'après Morrison et Sartori (1969). Courbe de lumière de SN I, en fonction du temps réduit t/τ, où τ est le temps caractéristique de la décroissance lente (quasi-exponentielle). La courbe en trait plein est une moyenne tracée à travers les points expérimentaux.

Fig. 4 : Courbes de lumière "bleue" (B) de SN I, d'après Barbon, Ciatti et Rosino (1973).

Fig. 5 : Courbe de lumière typique de SN II, d'après Shklovsky (1968). La magnitude absolue au maximum est: -17.7 ± 0.3, soit environ $4. 10^{42}$ ergs/s.

Fig. 6 : Courbe de lumière calculée par Bodenheimer et Ostriker (1974) pour les SN II. Nous avons superposé sur la figure la courbe typique de SN II indiquée par Shklovsky.

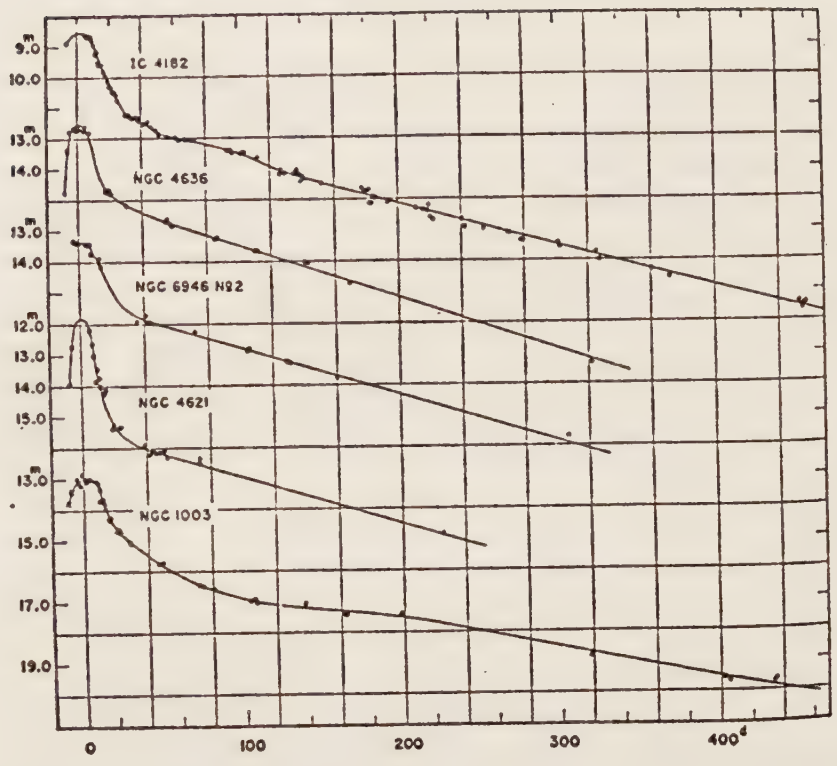


FIG. 1. Photographic light curves of supernovae of type I.

(d'après Minkowski, 1964)

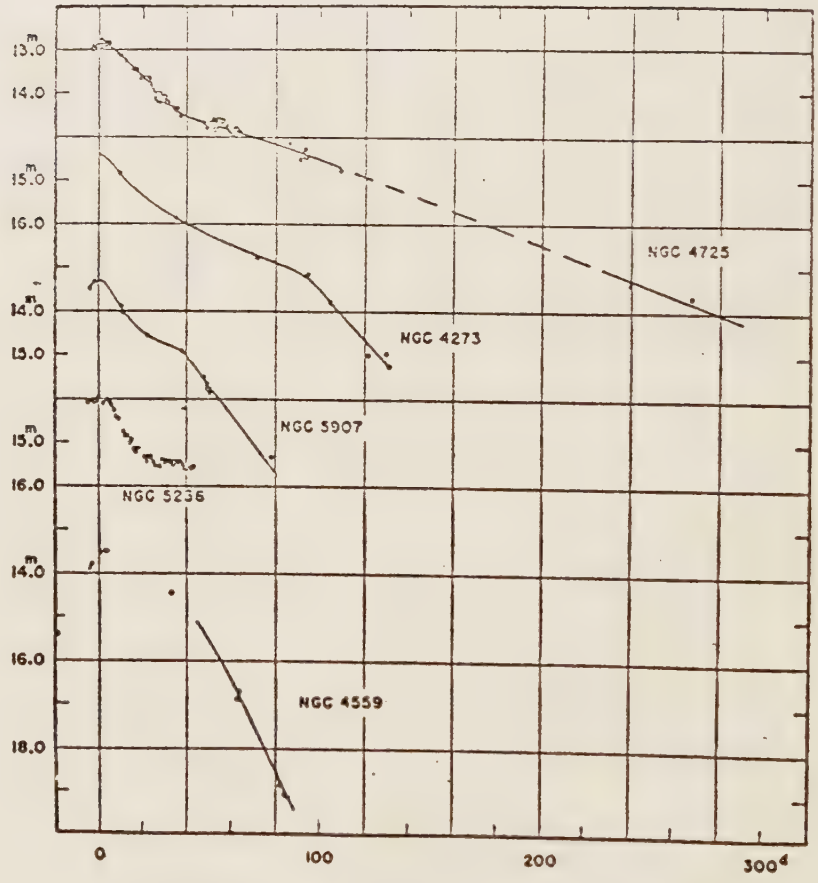
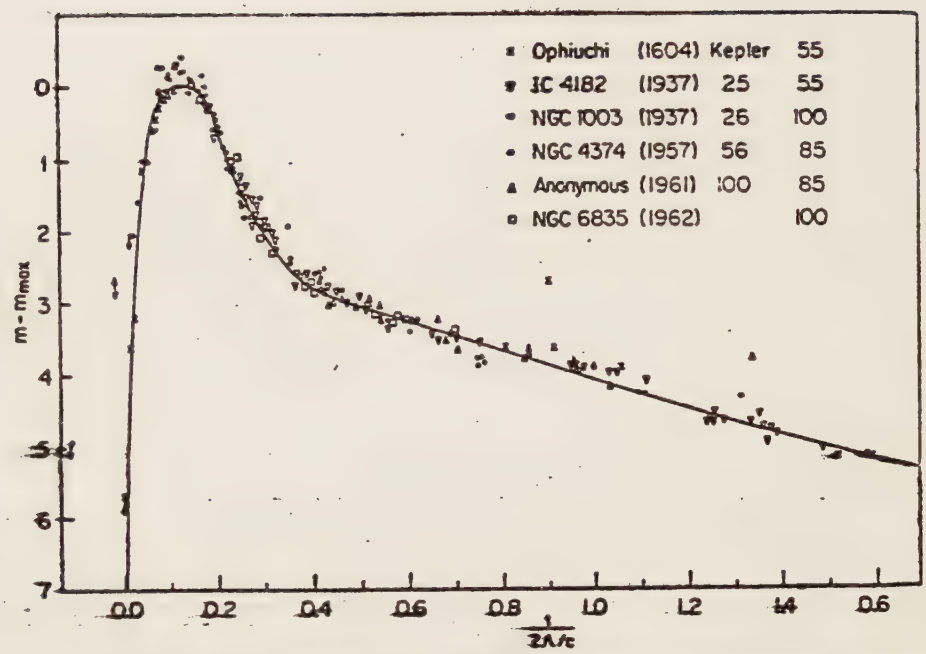


FIG. 2. Photographic light curves of supernovae of type II.

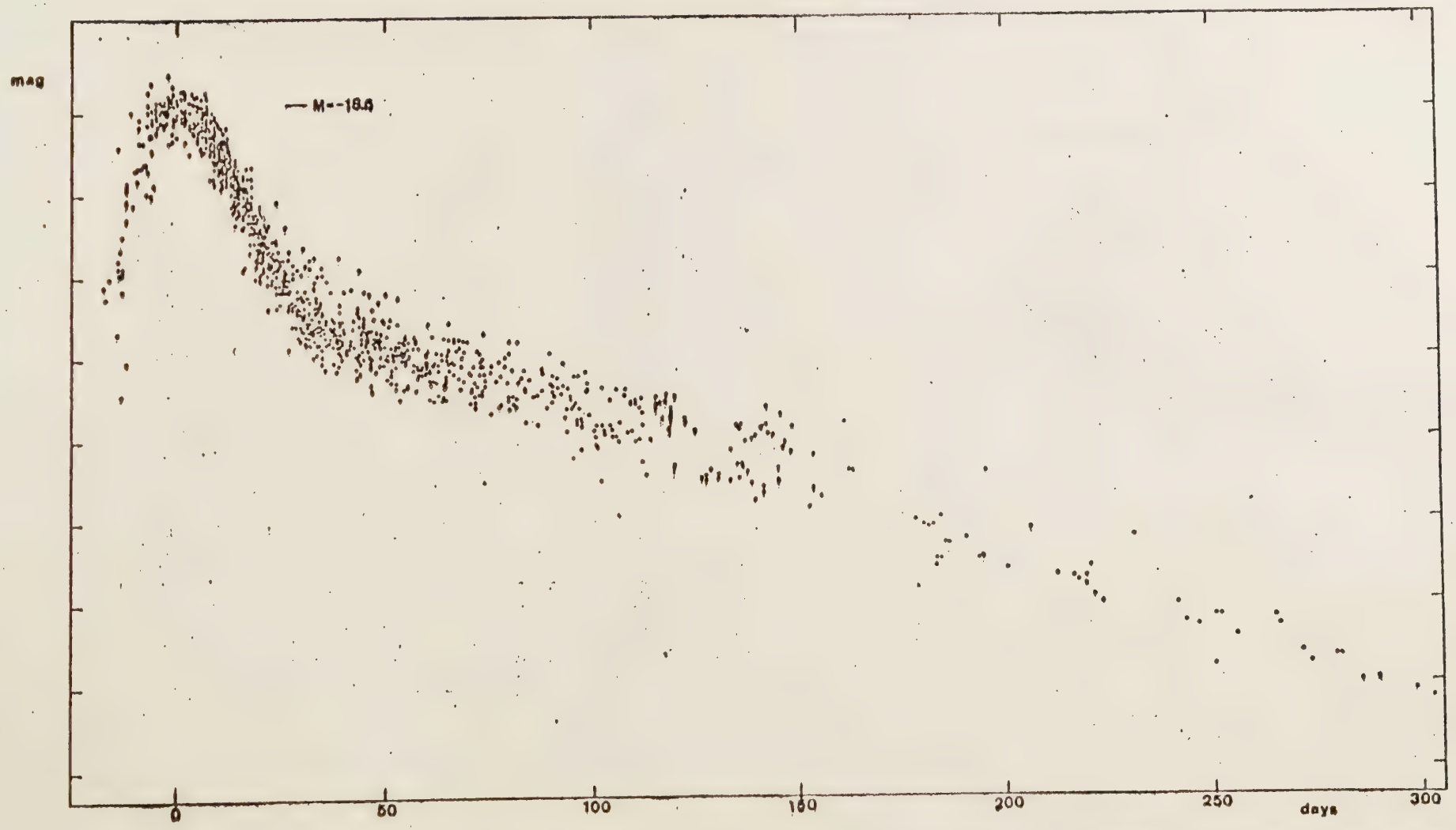
(d'après Minkowski, 1964)



Composite photographic light curve for SN I; the luminosity is plotted as a function of the dimensionless variable $\frac{1}{2}ct/\Lambda$. Following the date of each supernova is its number on Zwicky's master list (Zwicky 1964), and the value of Λ. The points for SN 1604 represent visual observations and, strictly speaking, do not belong on a photographic light curve. However, they probably include a substantial amount of the λ4600 feature which dominates the photographic light curve; see discussion in text.

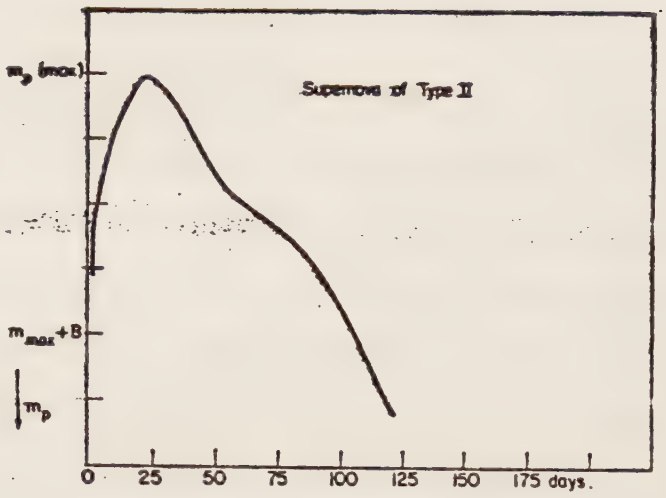
Fig. 3

(d'après Morrison et Sartori, 1969)



Average blue light curve, obtained by the fitting (as explained in the text) of the observations of 38 type I supernovae (see Table 1). One magnitude intervals are marked on the ordinates

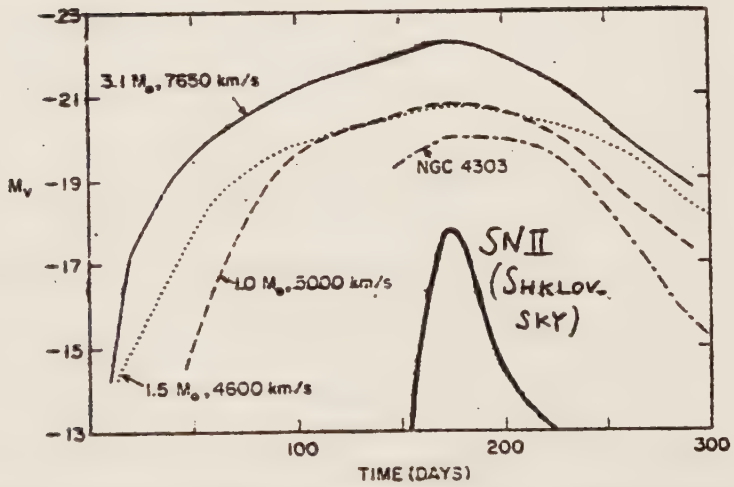
Fig. 4
(d'après Barbon, Ciatti et Rosino, 1973)



Schematic light curve of supernova of type II.[12]

Fig. 5

(d'après Shklovsky, 1968)



Supernova light curves. *Solid line*, numerical calculation with $E = 2.5 \times 10^{52}$ ergs. *Dotted* and *dashed curves*, approximate scaled solutions with $E = 1.12 \times 10^{52}$ ergs. *Dash-dot curve*, observations of SN 93 in NGC 4303 (Zwicky 1965), with an assumed Hubble constant of 50 and an assumed absorption of 0.5 mag. Calculated curves are labeled with the assumed value of envelope mass and the derived expansion velocity (at maximum light).

Fig. 6

(d'après Bodenheimer et Ostriker, 1974)

Section I - Les modèles théoriques de supernovae.

Il est clair que l'on ne peut imaginer de théorie des courbes de lumière sans avoir en tête une interprétation au moins qualitative du phénomène "supernova". Une revue rapide des principaux mécanismes envisagés pour l'explosion des supernovae a été effectuée par B. Gaffet (1975) (voir Appendice II) que nous résumons maintenant très brièvement.

Tout d'abord, les calculs d'évolution stellaire (Paczynski, 1968) ont montré que les étoiles de masse inférieure à 4 $M_\odot$ traversent au cours de leur évolution une phase pulsationnellement instable (phase de fusion de l'Hélium), et éjectent probablement ainsi toute la masse en excès de la masse de Chandrasekhar : elles terminent donc probablement leur vie comme naines blanches.

Le groupe suivant - par masse croissante - est constitué par les étoiles de 4 à 8 $M_\odot$ qui sont dégénérées pendant la phase de fusion du Carbone ; Paczynski (1970) a montré que toutes ces étoiles ont un coeur de structure commune, avec une masse de l'ordre de 1 $M_\odot$. Ce groupe a été proposé par Gunn et Ostriker (1970) comme progéniteur des supernovae, sur la base d'une étude statistique montrant en particulier que le nombre de ces étoiles en fin d'évolution coïncide avec le taux d'apparition des S.N. dans notre galaxie. Cependant, les calculs d'évolution (Hoyle et Fowler, 1960 ; Arnett, 1969 ; etc...) semblent montrer que la masse totale de ces étoiles devrait être dispersée dans le milieu interstellaire par la détonation

du Carbone du fait de la dégénérescence (analogue de l'"Helium flash"). L'enrichissement en Fer de la Galaxie serait alors beaucoup trop grand et en outre on n'expliquerait pas la formation des étoiles à neutrons.

Arnett et Schramm (1975) suggèrent d'éliminer cette difficulté en admettant que les étoiles de 4 à 8 $M_\odot$ subissent également une importante éjection de matière au cours de leur évolution, en particulier sous forme de nébuleuses planétaires; ces étoiles deviendraient donc finalement des naines blanches. Ils proposent le groupe d'étoiles de 8 à 60 $M_\odot$ comme étant à l'origine des supernovae et indiquent que le nombre d'étoiles dans ce groupe est suffisant - bien que nettement plus faible que celui du groupe précédent. La masse moyenne de ce groupe est de 14 $M_\odot$ (en nombre) ou de 22 $M_\odot$ (par masse). La fusion du Carbone s'effectue alors de façon calme, dans un coeur non dégénéré, et on arrive finalement à la dissociation endothermique du Fer (Hoyle, 1946). Burbidge, Burbidge, Fowler et Hoyle (1957) ont montré que cette dissociation se produit brutalement lorsque la température atteint 8.10^9K, et une implosion se produit, conduisant à la formation d'un trou noir ou d'une étoile à neutrons. Contrairement au cas précédent où l'explosion était totale, on risque cette fois de se trouver devant une implosion complète, sans éjection de matière. Fowler et Hoyle (1964) tentent d'expliquer l'éjection de matière par la combustion nucléaire des couches externes en contraction, mais cet effet ne semble pas suffisant pour parvenir à renverser le sens de l'explosion (Colgate et White, 1966). Cependant, Colgate et White suggèrent que l'énergie énorme fournie par l'implosion sous

forme de neutrinos ($\sim 10^{53}$ ergs) permet une éjection efficace de l'enveloppe de l'étoile ; ces résultats sont confirmés par des travaux tenant compte des données récentes sur l'interaction faible (Arnett, 1974).

Il n'est cependant pas indispensable de considérer tous les détails d'un tel processus pour étudier les courbes de lumière : tous ont en commun la libération quasi-instantanée d'une certaine quantité d'énergie W dans des couches plus ou moins profondes de l'étoile, de sorte que le déroulement de l'explosion va dépendre essentiellement de la structure de la pré-supernova, mais assez peu de la façon exacte dont l'énergie W a été libérée dans la région centrale. En outre, le seul paramètre de structure qui intervient pratiquement est la distribution de densité $\rho(r)$, car la température est toujours négligeable par rapport à celle de l'onde de choc. Nous allons voir que l'introduction de densités $\rho(r)$ déduites des modèles stellaires conduit à des difficultés dans l'interprétation des courbes de lumière, mais qu'on peut les surmonter en utilisant des densités plus arbitraires ; en particulier, l'hypothèse d'une enveloppe circumstellaire géante est faite assez fréquemment (Grassberg et al. 1971 ; Falk et Arnett, 1973). G. Lasher (1975) obtient un bon fit des courbes de lumière de SN I dans la région du pic mais ce résultat semble dépendre crucialement de l'hypothèse que toute la masse de l'étoile est constituée par une enveloppe géante (700 $R_\odot$) de densité pratiquement uniforme, de sorte que l'onde de choc concentre toute la masse dans une région très superficielle, contrairement aux résultats des calculs plus réalistes, qui conduisent à une distribution de densité décroissant

régulièrement du centre vers la périphérie (Colgate et White, 1966 ; Grassberg et al., 1971).

Notre calcul (Section II) ne nécessite au contraire aucune hypothèse particulière sur la distribution de masse de la pré-supernova, et fait appel à la source d'énergie que constitue le pulsar supposé formé au moment de l'explosion.

1) Notions élémentaires. Phases successives de l'expansion.

On peut distinguer généralement 4 phases dans l'expansion d'une supernova, pendant la période qui nous intéresse ($t \lesssim 1$ an) ; nous ne discuterons pas ici les phases qui se produisent plus tardivement ($t \gtrsim 100$ ans) lorsque la masse balayée dans le milieu interstellaire n'est plus négligeable.

a) Phase de distribution de l'énergie par le passage d'une onde de choc.

La 1ère phase est caractérisée par la progression de l'onde de choc à travers la pré-supernova. Sur son passage, les couches successives qui étaient relativement froides et proches de l'équilibre hydrostatique sont brutalement chauffées et acquièrent une vitesse d'expansion v inférieure à la vitesse du choc v_s, mais du même ordre :

$$(1,1) \qquad v = \frac{2}{(\gamma + 1)} \cdot v_s$$

La température est généralement assez élevée pour que l'énergie interne soit essentiellement sous forme de rayonnement, de sorte

que $\gamma = 4/3$ ($v = \frac{6}{7} v_s$). La pression du gaz produit encore une accélération supplémentaire du mouvement après le passage de l'onde de choc.

On démontre que dans un milieu présentant un gradient de densité assez important (par exemple, une étoile dont la densité décroît plus vite que $\frac{1}{r^3}$) l'onde de choc se propage de plus en plus rapidement, et cette propriété a été utilisée par Colgate et Johnson (1960) pour expliquer la production de rayonnement cosmique ; ils ont en effet calculé qu'une pré-supernova ayant une masse de 1 ou 2 $M_\odot$ et la structure d'un polytrope $n = 3$ est capable d'éjecter au moment de l'explosion une masse de l'ordre de 10^{-4} $M_\odot$ à des énergies relativistes du fait de l'accélération de l'onde de choc dans les couches externes. Cependant, cet effet n'atteint une telle efficacité que pour des structures initiales assez compactes : le rayon de la pré-supernova était supposé de 10^4 km environ . Lorsque la structure initiale est plus étendue — cas d'une géante rouge par exemple, avec un rayon de l'ordre de quelques 10^7 Km — l'accélération du choc est beaucoup moins importante (voir Colgate et White).

Dans tous les cas, on obtient une estimation de la vitesse moyenne du choc en admettant l'équipartition de l'énergie totale (W) entre les formes cinétique et thermique, soit :

$$(1,2) \quad W \sim M \, v_S^2 \quad , \quad v_S \sim \sqrt{\frac{W}{M}}$$

et par suite la date (t_c) à laquelle l'onde de choc traverse la surface de l'étoile — de rayon initial R_i — est, grossièrement :

$$(1,3) \qquad t_c \sim \frac{R_i}{v_S} \sim R_i \sqrt{\frac{M}{W}}$$

Cette date marque évidemment la fin de la 1ère phase.

b) Phase d'expansion et de refroidissement adiabatique.

La supernova poursuivant son expansion continue à s'accélérer par l'effet de sa pression ; dans un traitement hydrodynamique complet, il faut tenir compte de la propagation d'une onde de raréfaction qui apparaît à l'instant t_c à la surface et se dirige vers le centre (voir COURANT et FRIEDRICHS, 1948). Au cours de cette 2ème phase l'énergie interne U disparaît progressivement du fait de l'expansion adiabatique et se transforme en énergie cinétique d'expansion; pour un gaz d'indice $\gamma = 4/3$, l'énergie thermique U varie comme $\frac{1}{R}$; admettant une énergie interne initiale $U_i \sim \frac{W}{2}$, il reste donc une énergie $U \sim \frac{W}{2} \cdot \frac{R_i}{R_o}$ lorsque la supernova atteint le rayon R_o.

Lorsque $R_o \gg R_i$, la supernova est donc considérablement refroidie et chacune de ses parties continue son expansion à vitesse constante ; en outre, du fait de la condition $R_i \ll R_o$, l'équation horaire est pratiquement de la forme : $r = vt$, et la supernova est alors en expansion homothétique. C'est la fin de la 2ème phase.

c) Perte par diffusion radiative de l'énergie interne restante.

Lorsque la supernova atteint un rayon suffisant (R_d), les pertes d'énergie thermique par diffusion deviennent

importantes. Admettant pour simplifier une supernova de densité uniforme et de rayon R_o, le temps de diffusion pour un photon émis au centre est donné par :

$$(1,4) \qquad \frac{R_o^2}{2Dt} = 1$$

et le coefficient de diffusion est relié au libre parcours moyen λ par : $D = \frac{\lambda c}{3}$; pratiquement, la source d'opacité principale est la diffusion Thomson (σ_T = 665 mb) car le milieu est presque totalement ionisé (Colgate et White), et le libre parcours vaut donc :

$$(1,5) \qquad \lambda = \frac{1}{n_H \sigma_T}$$

On voit que le temps caractéristique de diffusion à l'instant t est proportionnel à 1/t ; le temps caractéristique des pertes adiabatiques est au contraire le "temps d'expansion", $t_{exp} = t/2$; on voit que les pertes par diffusion vont finalement égaler puis dépasser les pertes adiabatiques, à un certain moment que nous appelons par définition le "temps de diffusion" - ou "temps de diffusion effectif" - t_d .

Admettant une énergie interne distribuée uniformément à travers la supernova, la distance moyenne à parcourir par diffusion est seulement $R_o/2$ environ, et le temps t_d est donc défini par :

$$(1,6) \qquad \frac{(R_o/2)^2}{2Dt} = 1$$

Numériquement, exprimant la masse M en masses solaires ($M_\odot$), la vitesse d'expansion $\dot{R}_o$ en milliers de km/s et les rayons R_o en unités de 10^{10} km, on obtient :

$$(1,7) \qquad t_d = 5.10^6 s. \sqrt{\frac{M}{\dot{R}_o}}$$

et le"rayon de diffusion" correspondant $R_d = \dot{R}_o\, t_d$ vaut donc :

$$(1,8) \qquad R_d = \frac{\sqrt{M\, \dot{R}_o}}{2} = 6.4 \sqrt{\frac{W}{\dot{R}_o}}$$

L'énergie totale est : $W = 0.3\ M\ \dot{R}_o^{\,2}$ pour une supernova homogène, et elle est exprimée ici en unités de 10^{51} ergs.

La quantité de lumière rayonnée par diffusion est évidemment de l'ordre de la quantité d'énergie thermique subsistant dans la supernova à l'instant t_d, soit :

$$(1,9) \qquad \frac{\int L\, d\, t}{W} \sim \frac{R_i}{R_d}$$

D'après la formule (5) R_d est de l'ordre de quelques 10^{10} km, et R_i ne dépasse pas 10^7 ou 10^8 km pour une géante : le "facteur d'efficacité" de la conversion de l'énergie W en énergie lumineuse observable semble donc au plus de l'ordre de 1 %. Cette estimation concorde d'ailleurs assez bien avec l'évaluation : $W \sim 10^{51}$ ergs obtenue pour les jeunes rémanents de supernova — on calcule aussi des valeurs analogues de W à partir des vitesses d'expansion observées pendant la phase optique — et $\int L dt \sim 10^{49}$ ergs (un peu plus pour les SNI). Cependant, quelques auteurs admettent des rapports $\frac{R_d}{R_i}$ beaucoup plus

faibles : Falk et Arnett (1973) en particulier ont présenté un modèle ("modèle B") de SNII dans lequel le "facteur d'efficacité" $\frac{\int L dt}{W}$ est voisin de 1/2. Dans ce cas, il n'y a évidemment plus de séparation nette entre les phases b et c (ou même a, b et c) car les pertes par diffusion ne sont jamais négligeables ; plus généralement, c'est le cas des modèles (comme celui de Grassberg et al., 1971) qui interprètent le pic de luminosité observé comme dû au passage de l'onde de choc à la surface de l'étoile.

d) Phase de transparence - "Cooling wave".

L'expansion se poursuivant, l'épaisseur optique de la S.N. décroît régulièrement et finit par devenir inférieure à 1 ; l'approximation de la diffusion n'est alors plus valable et le milieu devient transparent. S'il y a encore des sources de chaleur à ce moment, leur rayonnement s'échappe sans autre délai que celui nécessaire à la traversée de la supernova en ligne droite à la vitesse de la lumière.

Généralement, la température est alors assez basse (5000 à 7000 K) et le gaz se recombine, de sorte que le milieu devient transparent un peu plus vite que par le simple effet géométrique de l'expansion.

Si le rayonnement est en équilibre thermodynamique local — cas d'un gaz assez dense, en particulier — il se forme une "onde de refroidissement" (cooling wave) lorsque la température de la photosphère atteint 6000 K environ ; elle coïncide pratiquement avec la photosphère et se situe à la limite entre les régions neutres (transparentes) et les régions ionisées.

La photosphère "se propage" ainsi jusqu'aux régions centrales, et finit par disparaître ; cet effet a été étudié en particulier par GRASSBERG, IMSHENNIK et NADYOZHIN (1971), et C. GORDON (1972) a utilisé les observations de cette récession de la photosphère dans ses calculs d'équilibre d'ionisation et d'intensité de raies.

2) Modèles faisant intervenir le transport de rayonnement par diffusion ou par onde de choc.

Ces deux types de modèles sont très liés, car la diffusion radiative joue un rôle prépondérant dans les deux cas ; ils correspondent cependant à des approches assez différentes du problème : l'une est celle de Colgate et White (1966) qui, ayant effectué une étude hydrodynamique approfondie de l'expansion d'une supernova, envisagent la question de la lumière rayonnée comme un simple problème de diffusion radiative, sans rapport direct avec l'existence d'une onde de choc ; l'autre est celle de IMSHENNIK et NADYOZHIN (1964) développée par GRASSBERG, IMSHENNIK et NADYOZHIN (1971), qui tend à privilégier le rôle de l'onde de choc dans l'interprétation de la courbe de lumière, mais où la largeur du pic reste commandée par la diffusion.

a) Théorie de Colgate et White (1966) et de Colgate et Mc Kee (1969).

Comme on l'a vu ci-dessus, Colgate et White proposent d'expliquer l'intensité et la forme de la courbe de lumière par une théorie de diffusion radiative à travers la matière éjectée.

Partant d'une structure initiale de géante rouge - calculée par HOFMEISTER, KIPPENHAHN et WEIGERT (1964) - ils étudient de façon détaillée l'évolution hydrodynamique de la supernova mais ne traitent le problème de diffusion que de façon qualitative. Ils remarquent en particulier l'importance cruciale pour la diffusion de l'instant où la détente adiabatique amène la température aux environs de 10^4 K : en effet, à plus haute température ($\gtrsim 2 \times 10^4$ K) c'est à dire à une époque où la S.N. était plus compacte, la luminosité maximum possible était plus faible du fait de l'effet géométrique et de l'importance accrue des corrections bolométriques, malgré la valeur plus élevée de l'énergie interne ; d'autre part, en dessous de 10^4 K, les corrections bolométriques sont faibles et la "luminosité maximum possible" $4\pi R_o^2 \sigma T^4$ décroît au moins en $\frac{1}{R_o^2}$ du fait des pertes adiabatiques : le pic de luminosité est donc le plus élevé s'il se produit à une température voisine de 10^4 K. Enfin, vers 6000 K, on atteint le domaine de transparence du fait de la recombinaison, et toute l'énergie interne restante est alors rayonnée.

Dans le cas le plus favorable, celui de la géante rouge, Colgate et White montrent que la température atteint 10^4 K pour un rayon d'environ 2×10^{10} km (plus précisément, chaque couche de la S.N. atteint la température de 10^4 K à un rayon inférieur ou égal à 2×10^{10} km). Mais l'énergie interne n'est plus alors que de 5.10^{47} ergs environ, soit un facteur 40 trop bas par rapport aux valeurs observées (2.10^{49} ergs pour les SNII, 4.10^{49} ergs pour les SNI d'après les auteurs).

La luminosité dûe à la chaleur déposée par le choc

étant beaucoup trop faible, il est nécessaire de recourir à une autre source de chaleur. Colgate et White proposent comme source la désintégration β des noyaux instables formés au cours de l'explosion. Cette hypothèse a été étudiée en détail par Colgate et Mc Kee (1969), qui obtiennent des courbes de lumière convenables (pour les SNI) en admettant la formation de 0.25 $M_\odot$ de Nickel 56 au moment de l'explosion ; ce N_i^{56} se désintègre d'abord en Co^{56} ($\tau_{1/2}$ = 6 jours), puis le Cobalt 56 se désintègre en Fe^{56} avec une période de 77 jours, expliquant ainsi la décroissance lente de la partie post-maximum de la courbe de lumière. CLAYTON, COLGATE et FISHMAN (1969) ont indiqué d'autre part que la masse de Ni^{56} éjectée par supernova ne peut dépasser 0.14 $M_\odot$ sans contradiction avec les données actuelles sur les abondances universelles.

Du point de vue hydrodynamique, la solution calculée par Colgate et White est caractérisée par une distribution de densité assez "compacte" après expansion : la région centrale rassemble en effet près de la moitié (42 %) de la masse avec une densité pratiquement homogène, et la "surface" (58 % de la masse) a une distribution de densité rapidement décroissante $\rho(r) \sim \frac{1}{r^7}$, d'après Colgate et Mc Kee ($\rho(r) \sim \frac{1}{r^{10}}$ d'après Colgate et White). Il est important de remarquer que, dans la structure stellaire de départ calculée par HOFMEISTER et al., la moitié de la masse est concentrée à l'intérieur d'une sphère de rayon très inférieur au rayon de l'étoile R_i : les pertes adiabatiques sont donc beaucoup plus fortes pour les régions centrales, et pratiquement seules les régions périphériques (avec $\rho \sim 1/r^{10}$) conservent assez de

chaleur pour contribuer à la courbe de lumière (lorsqu'on néglige la chaleur produite par des sources telles que Ni^{56}, etc...). Ceci permet de comprendre pourquoi le temps de diffusion calculé par Colgate et White est si court (environ $0.8.10^6$s), alors que la valeur élevée de la masse (10 $M_\odot$) répartie globalement de façon quasi-homogène, avec une vitesse d'expansion de l'ordre de 10^4 km/s, laisserait prévoir un temps de diffusion de l'ordre de 5.10^6s ; le temps de diffusion calculé par Colgate est en effet celui nécessaire à la traversée d'une couche superficielle dont l'épaisseur $\delta r/r$ est de l'ordre de 1/10. En contrepartie, l'énergie totale rayonnée est faible car seule une couche sphérique externe d'une masse de l'ordre de M/10 fournit un rayonnement appréciable ; finalement, même en admettant une énergie cinétique de 10^{52} ergs,Colgate et White n'obtiennent ainsi (en l'absence de sources β telles que Ni^{56}) qu'un rayonnement de 5.10^{47} ergs environ, trop faible par un facteur 40 ou 80, comme on l'a vu.

b) Théorie de Grassberg, Imshennik et Nadyozhin (1971).

La première tentative d'explication des courbes de lumière par le passage d'une onde de choc a été celle de Imshennik et Nadyozhin (1964), dont le travail a été développé par Imshennik et Nadyozhin (1967) en particulier. GRASSBERG et al. (1971) ont effectué des calculs de courbes de lumière en admettant des structures initiales très étendues, leur meilleur modèle ayant un rayon initial R_i = 5000 $R_\odot$, soit $3.5\ 10^9$ Km.

Comme on l'a vu, augmenter le rayon initial a essentiellement pour effet de réduire les pertes adiabatiques : dans leur modèle n° 3, avec $M = 30\ M_\odot$ et $R_i = 500\ R_\odot = 3.5.10^8$ Km, les auteurs évaluent les pertes adiabatiques à un facteur 100 environ à l'époque du maximum optique, l'énergie totale étant $W = 3.3.10^{50}$ ergs et l'énergie rayonnée $\int L dt = 3.6.10^{48}$ ergs.

Dans ce type de modèle le pic de luminosité est interprété comme étant dû à l'émergence de l'onde de choc à la surface de l'étoile ; sa largeur dépend directement du coefficient de diffusion, car elle est dûe à la présence d'une "langue de feu" ou "flamme" (hot tongue) précédant le choc et dûe à la diffusion de la chaleur à travers l'onde de choc. Cependant la largeur de la flamme est relativement faible par rapport au rayon de la supernova, de sorte que la largeur du pic est très inférieure au temps de diffusion à travers la supernova donné par l'éq. (1,4) par exemple ; ce pic est donc suivi par une phase de durée assez longue (t_d, eq. (1,7)) de diffusion de la chaleur emmagasinée dans toute la supernova. Il semble que, pour reproduire la largeur du pic ($\sim$ 20 jours), il faille admettre un temps de diffusion t_d de l'ordre de 100 jours : c'est la valeur obtenue par Grassberg (modèle 4) et par Falk et Arnett (1973, modèle B), dans des cas très différents mais reproduisant de façon réaliste la largeur du pic.

Il est clair que ces modèles exagèrent encore la nécessité de structures initiales très étendues qui avait été imposée par l'étude des pertes adiabatiques. En effet, le modèle n° 3 de Grassberg ($30\ M_\odot$, $R_i = 500\ R_\odot$) conduit à un pic de luminosité beaucoup trop étroit : l'onde de choc émerge à la date $t \sim 1.6$ jour (voir éq. (1,3) avec

$\dot{R}_o \simeq$ 6000 km/s), et le pic dure moins d'une journée. La température de couleur est très grande, 90 000 K au pic.

Les auteurs envisagent donc un modèle plus étendu (modèle n° 4) obtenu en ajoutant au précédent une enveloppe de $0.9 M_\odot$ et de rayon $5000 R_\odot$; cette enveloppe n'est pas supposée en équilibre hydrostatique ni en équilibre thermique (sa densité est : $\rho(r) \sim 1/r^3$). L'onde de choc traverse alors la surface à la date t_c = 14 jours — mais la "flamme" qui la précède a déjà atteint la surface pour t = 6.1 jours ; la largeur du pic est de l'ordre de 5 jours, en meilleur accord avec les observations, et la température de couleur au pic est voisine de 50 000 K. La phase de diffusion de la chaleur se poursuit ensuite, entraînant une décroissance très lente de la luminosité pendant plusieurs mois ; à la date t = 35 jours, une onde de recombinaison (cooling wave) se forme, et la photosphère cesse son expansion à vitesse constante et se stabilise quelque temps à un rayon de l'ordre de 20 000 $R_\odot$, soit 4 R_i. Ce phénomène de "cooling wave" et la récession de la photosphère qui en résulte ont été étudiés de façon détaillée par les auteurs (Grassberg et al., 1971) et joue certainement un rôle important dans la phase optique finale d'une S.N. ; cependant, la notion d'"onde de refroidissement" disparaît lorsque la densité devient trop faible (inférieure à 10^{-14} g/cm^3, soit 6.10^9 atomes H par cm^3) ou lorsque le rayonnement n'est plus en équilibre thermique avec le milieu ; le calcul exact est donc sans doute assez délicat dans le cas des supernovae.

Enfin, une conséquence intéressante de la présence d'une flamme précédant l'onde de choc est la formation d'une

mince couche superficielle de haute densité concentrant presque toute la matière située dans l'enveloppe étendue de la supernova — environ 1 $M_\odot$, comprimée par un facteur de l'ordre de 10^2 à 10^3 ; en effet l'importance de la diffusion radiative dans cette enveloppe étendue rend le choc isotherme, d'où la valeur élevée des facteurs de compression.

c) Modèle de Falk et Arnett (1973).

Le modèle de Falk et Arnett est très voisin de celui de Grassberg et al., que nous venons de présenter ; il s'en distingue essentiellement par l'hypothèse d'une enveloppe circumstellaire encore plus étendue au départ ($R_i = 10^{10}$ km, soit 14000 $R_\odot$) et par des choix différents des masses et des vitesses d'expansion.

Nous avons vu en effet que l'hypothèse d'une structure initiale très vaste (plus étendue en fait que ne l'impose l'existence des pertes adiabatiques) est nécessaire dans ce type de modèle, où l'onde de choc ne doit atteindre la surface qu'après un trajet d'une ou de quelques dizaines de jours ; en particulier le pic de luminosité calculé par Grassberg dans le modèle n° 4 (R_i = 5000 $R_\odot$) est encore trop étroit.

Cette difficulté est entièrement surmontée dans le calcul de Falk et Arnett, qui présentent une courbe de lumière très réaliste, pour une masse totale de 10 $M_\odot$ et un rayon $R_i = 10^{10}$ km. (fig.1).

Comme nous l'avons remarqué, le temps de diffusion dans ce modèle est de l'ordre de 100 jours, ce qui fixe d'après l'éq.(1,7) , une relation entre la masse M et la vitesse

d'expansion $\dot{R}_o$:

$$\frac{M}{\dot{R}_o} \sim \frac{5\ M_\odot}{10^3\ \text{km/s}}$$

Si l'on choisit des vitesses d'expansion réalistes on est ainsi conduit à des masses très élevées, de l'ordre de 50 $M_\odot$ — Grassberg et al. avaient choisi : $M = 30\ M_\odot$ pour une vitesse d'expansion de 6000 km/s ; si l'on choisit au contraire des valeurs plus typiques pour les masses (10 $M_\odot$), on obtient des vitesses d'expansion extrêmement faibles, de l'ordre de 2000 km/s ; ce qui est la vitesse calculée par Falk et Arnett (modèle B).

On voit que les modèles de Grassberg et al. d'une part, de Falk et Arnett d'autre part, explorent les deux régions extrêmes d'un même modèle dépendant essentiellement d'un paramètre ; mais aucune valeur du paramètre ne semble fournir de compromis entièrement satisfaisant.

d) Modèle de G. Lasher (1975).

G. LASHER (1975) a montré de façon très élégante que la théorie de Colgate et White convenablement modifiée peut rendre compte parfaitement du pic de luminosité —largeur,

forme, intensité — en particulier dans le cas des SNI.

Comme celui de Colgate et Mc Kee, son calcul est basé uniquement sur la diffusion de la chaleur déposée par le choc, dans une phase nettement postérieure à l'émergence de l'onde de choc. Il utilise les deux "ingrédients" suivants :

- une enveloppe circumstellaire "modérément" étendue, de rayon $R_i = 5.10^8$ km, de façon à ramener les pertes adiabatiques à des valeurs raisonnables. Cette enveloppe est 10 ou 20 fois plus étendue que celle qui a été considérée par Colgate et White, sur la base des calculs de structure stellaire de HOFMEISTER et al. ; elle est cependant 20 fois moins étendue que celle qui est nécessaire dans le modèle de Grassberg pour reproduire un pic de luminosité de même largeur.

- le deuxième problème à surmonter dans la théorie de Colgate est celui de la rapidité de la croissance de la luminosité, avec un temps caractéristique de l'ordre de la semaine : pour les valeurs admises par Lasher ($M = 2\ M_\odot$, $\dot{R}_o \simeq 10^4$ km/s) le temps de diffusion calculé par l'équation (1,7) est en effet de 25 jours environ. L'auteur résoud cette difficulté en admettant une structure initiale homogène ; contrairement à ce qui se produit dans une étoile de structure normale, où Colgate et White ont montré que l'onde de choc s'accélère du fait du gradient de densité, la vitesse du choc diminue alors régulièrement au cours de sa propagation ; le résultat est la concentration de toute la masse en une mince couche superficielle du fait de cette inversion des distributions de vitesse—les couches internes ayant acquis une vitesse plus grande au moment du choc (voir la

solution de ce problème par la méthode de self-similarité de Sedov (1949)).

Le temps de diffusion est divisé par un facteur $3/\varepsilon$ pour une couche sphérique d'épaisseur $\delta R/R = \varepsilon$, relativement au temps de diffusion à travers une sphère homogène ; le "temps de diffusion effectif" — c'est à dire l'instant où $t_d = t/2$ — est donc divisé par $\sqrt{3/\varepsilon}$. Pour une distribution superficielle d'épaisseur $\delta R/R = 0.1$, on gagne ainsi un facteur 5 sur le temps de diffusion, ce qui ramène t_d de la valeur 2×25 jours calculée par l'éq ..(1,4)à une valeur, 10 jours, voisine de la valeur observée.

G. Lasher obtient ainsi un bon fit du pic de luminosité des SNI pour une série de modèles dépendant d'un paramètre, par exemple la masse de la supernova. Une solution est obtenue en particulier pour $M = 2\ M_\odot$ avec $R_i = 5.10^8$ km, $\rho_i = 10^{-8}$ g/cm^3, $W = 10^{51}$ ergs, et une vitesse maximum $\dot{R}_o = 10^4$ km/s. Les pertes adiabatiques sont d'un facteur 30 : $\int L dt \simeq \frac{W}{30}$. (fig.2).

Tout en soulignant l'intérêt de ce modèle, il est bon de noter les deux critiques suivantes concernant la structure initiale choisie :

- d'après l'auteur lui-même, il est essentiel que l'homogénéité du milieu soit suffisante : un calcul fait pour une distribution de densité $\rho(r) \sim 1/r^3$ conduit à une croissance trop lente de la luminosité.

- pour la même raison — nécessité d'une décélération continue de l'onde de choc, de manière à obtenir une distribution de masse superficielle — ce modèle de supernova est dépourvu

de "coeur" : en effet, la présence d'un coeur relativement massif et compact aurait pour effet de réduire la vitesse du choc au départ, et il n'y aurait plus de décélération importante au cours de la traversée de l'enveloppe.

3) Modèle de fluorescence de MORRISON et SARTORI.

Morrisson et Sartori (1969) ont proposé d'interpréter la partie lentement (exponentiellement) décroissante de la courbe de lumière des SNI par un mécanisme de fluorescence : un "pulse" très énergique - environ 10^{52} ergs - serait produit initialement au moment de l'explosion sous forme de rayonnement UV et exciterait la fluorescence du milieu interstellaire (cas des SNII) ou d'une enveloppe d'hélium éjectée avant l'explosion (cas des SNI) ; à chaque instant, le lieu des points observables du fait de la fluorescence est défini par la condition que la somme des trajets des rayons UV et visible soit constante (voir fig. 3), et constitue un ellipsoïde dont les foyers sont la supernova elle-même et l'observateur ; il s'agit donc pratiquement d'un paraboloïde. Sous sa forme la plus simple — zône de fluorescence de densité homogène, "pulse" $\delta(t)$ de rayonnement UV — le modèle prévoit une forme en $E_1\ (t/\tau\ )$ pour la courbe de lumière ; un grand succès de cette théorie est la reconnaissance du fait qu'on obtient ainsi un excellent fit des courbes de lumière de SNI (à l'exclusion du pic, cependant), fit de qualité meilleure que celui que fournirait une simple exponentielle.(fig 4).

Ce modèle prévoit également un décalage progressif des raies vers le rouge, en partant d'un "blue-shift" initialement et en passant par un décalage nul ; ceci semble confirmé jusqu'à un certain point par l'observation (voir KIRSHNER et al, 1972).

Une des difficultés de ce modèle est l'énergie considérable du pulse UV, 10^{52} ergs ; en outre, pour atteindre le maximum d'efficacité, ce pulse doit être concentré dans le domaine d'énergie utile pour exciter la fluorescence de l'Hélium ionisé, soit : $E \gtrsim 50$ eV. Enfin, le modèle repose sur l'identification des raies à 4686 Å et 10124 Å comme raies de He^{II}, respectivement P_α et B_α), identification qui n'est pas certaine (Kirshner, 1972) et qui peut prêter à controverse étant donnée l'énorme énergie d'excitation ($\sim$ 50 eV).

Le modèle prévoit d'autre part la formation au centre, d'une sphère de Strömgren d'Hélium totalement ionisé (He^{III}), qui est d'ailleurs nécessaire pour "filtrer" les photons UV produits initialement à une énergie supérieure au potentiel d'ionisation de He^{II}, soit 54.4 eV, et les convertir en photons de plus basse énergie capables d'exciter la fluorescence de He^{II}. Beaucoup plus étendue, une région HII géante est également formée — la "Gum Nebula" pourrait en être un exemple.

Chiu et Morrison (1975) ont étudié en détail les observations de la supernova 1972e dans le cadre de cette théorie ; nous ne discuterons pas ici leurs résultats, la théorie de la fluorescence n'étant pas directement reliée à notre travail.

Indiquons pour terminer que la géométrie particulière du système a pour conséquence une expansion de la région source à une vitesse parfois supérieure à la vitesse de la lumière ; d'autre part, la zone de fluorescence ayant un rayon de l'ordre de 1 année-lumière, son diamètre apparent devrait être observable dans le cas d'une supernova galactique.

4) Théories faisant appel à l'énergie rayonnée par un pulsar.

a) Ostriker et Gunn (1971) remarquent la nécessité d'une source d'énergie continue ("storage battery") pour expliquer le pic de luminosité des supernovae, si le rayon initial de l'étoile a une valeur raisonnable (10^3 à 10^6 km), car les pertes adiabatiques sont énormes. Le fait que la supernova continue à rayonner dans le visible pendant un an ou plus rend d'ailleurs cette hypothèse encore plus nécessaire. Ultérieurement, lorsque la nébuleuse devient un "rémanent de supernova" observable en radio, une source continue d'énergie est également nécessaire ; dans le cas de la nébuleuse du Crabe la décélération produite par le "balayage" du milieu interstellaire est encore trop faible pour fournir assez d'énergie, mais on sait que le pulsar du Crabe fournit précisément la quantité d'énergie nécessaire pour expliquer le rayonnement de la nébuleuse.

Il semble donc naturel d'admettre à la suite d'Ostriker et Gunn que l'énergie rayonnée par une supernova est produite par un pulsar créé au moment de l'explosion. Ces auteurs indiquent d'ailleurs que les pulsars sont très probablement le résidu stellaire d'une explosion de SN II, pour les raisons suivantes :

- les études statistiques (Gunn et Ostriker, 1970) ont montré que les pulsars sont associés aux étoiles de population I et que leur taux de création est voisin du taux de "destruction"

des étoiles de masse supérieure à 4 $M_\odot$: les pulsars pourraient donc être le "résidu" laissé par ces étoiles en fin d'évolution.

- or ce groupe d'étoiles est probablement associé aux SN II d'après l'étude statistique des rémanents de supernovae (SHKLOVSKY, 1968) et d'après les calculs d'évolution stellaire (PACZYNSKI, 1970) : d'où la conclusion que les pulsars sont associés aux supernovae de type II. On observe d'ailleurs que les deux plus jeunes pulsars connus sont associés à des rémanents de supernovae (le Crabe et Vela).

Enfin, la théorie électromagnétique des pulsars (Ostriker et Gunn, 1969) indique qu'un pulsar en rotation suffisamment rapide — Ω = 1000 à 2000 s^{-1} — a une luminosité comparable à celle d'une supernova, soit 10^{43} ergs/s ; son énergie de rotation est alors de l'ordre de 10^{51} ergs, ce qui est voisin de l'énergie cinétique de la matière éjectée. Cette coïncidence numérique a conduit les auteurs (Ostriker et Gunn, 1971) à admettre que non seulement l'énergie lumineuse rayonnée, mais aussi l'énergie cinétique d'expansion étaient dûes essentiellement à l'action du pulsar.

Cette conclusion est confirmée partiellement par le cas de la nébuleuse du Crabe, dont on observe une accélération de l'expansion depuis l'époque de sa naissance, en 1054 ; la moitié de l'énergie d'expansion aurait été fournie après l'explosion initiale (Ostriker et Gunn, 1971).

b) Bodenheimer et Ostriker (1974) calculent la courbe de lumière en se plaçant dans le cadre du modèle d'Ostriker et Gunn. En particulier, l'expansion est supposés dûe essentiellement

à la pression du rayonnement du pulsar, l'énergie déposée dans l'enveloppe au cours de l'explosion étant supposée très faible : $E_B \sim 10^{44}$ à 10^{45} ergs, énergie juste suffisante pour stopper l'effondrement de l'enveloppe.

Les auteurs utilisent une distribution de densité réaliste pour la pré-supernova ; ils calculent la structure (densité et température) de l'étoile en partant de la relation masse-luminosité déterminée pour le coeur des géantes rouges par Paczynski (1970). Pour une masse totale de 4.5 $M_\odot$, ils obtiennent ainsi : $L = 4.5.10^4\ L_\odot$, $T_{eff} = 2265$ K, $R_i = 1370\ R_\odot \simeq 10^9$ Km ; presque toute la masse est concentrée dans une région relativement externe (10^8 Km $< r <$ 10^9 Km) avec une densité quasi-uniforme, voisine de 3.10^{-9} g/cm^3.

La vitesse moyenne de l'onde de choc est voisine de 1300 km/s au cours de la traversée de l'étoile, de sorte que le choc atteint la surface à la date t = 6.9 jours. Toute la matière de l'enveloppe est alors concentrée en une couche d'épaisseur $\delta R/R \simeq 0.15$; les pertes par diffusion sont négligeables pendant cette phase. L'émergence de l'onde de choc se traduit par un pic de luminosité très étroit, de l'ordre de 0.1 jour ; la luminosité remonte ensuite progressivement et se stabilise à la valeur de la luminosité du pulsar, $L_i = 3.77.10^{44}$ ergs/s , lorsque $t > t_d \sim 50$ jours. Ce plateau subsiste quelques centaines de jours, jusqu'à ce que la supernova devienne transparente ; les auteurs admettent que la luminosité s'affaiblit alors suivant une loi en $1-e^{-\tau}$ car le rayonnement synchrotron produit par le pulsar n'est pas dans le spectre visible, et seule une fraction de l'ordre de $1-e^{-\tau}$ est "thermalisée" et peut contribuer à l'émission visible.

La luminosité bolométrique reste donc constante plusieurs années dans ce modèle ; elle est égale (pour $t > t_d$) à la luminosité du pulsar et suit la loi : $L(t) = L_i/(1 + t/\tau)^2$, avec : $\tau \simeq 2$ ans.

La vitesse d'expansion atteint finalement 7600 km/s (et n'augmente plus lorsque $t > t_d$), mais il a fallu admettre une énergie totale élevée, $W = 2.5.10^{52}$ ergs, et l'énergie lumineuse rayonnée est 100 fois trop grande : de l'ordre de 2.10^{51} ergs au lieu de quelques 10^{49} ergs. D'autre part, la masse éjectée est concentrée en une couche relativement mince de sorte que la vitesse de 7600 km/s est une vitesse maximum, tandis qu'on observe dans les supernovae des couches animées de vitesses allant jusqu'à 15000 ou 20 000 km/s.

Enfin, l'existence d'un plateau de luminosité durant plusieurs mois ne semble compatible qu'avec certaines observations de supernovae particulières, telles que SN 93 dans NGC 4303, classée SN III par ZWICKY. (fig 5).

c) Modèle de M. Rees (1970)

Nous ne décrirons que brièvement ce modèle, qui n'est pas directement relié à notre travail. L'auteur indique lui aussi la nécessité d'une source d'énergie continue, car la chaleur libérée par l'explosion est immédiatement dissipée du fait de l'expansion adiabatique. Le pulsar est cette source d'énergie, mais il agit essentiellement par son rayonnement X ionisant dont la puissance est estimée de l'ordre de 10^{42} ergs/s dans la partie utile du spectre ($E < 5$ keV), la puissance totale étant de 10^{45} erg/s.

Le modèle ne spécifie pas l'origine du pic de luminosité — à l'instant $t_1 \sim 10$ jours — mais fournit une interprétation du plateau suivi d'une décroissance rapide qu'on observe dans les courbes de lumière de SN II après le maximum ; le pic lui-même pourrait être dû à la désintégration $Ni^{56} \longrightarrow Co^{56}$ proposée par Colgate et Mc Kee. Ultérieurement la supernova refroidie se recombine à l'exception d'une sorte de "sphère de Strömgren" autour du pulsar, englobant une fraction de plus en plus grande de la masse totale au cours de l'expansion; finalement, à un instant t_2 — de l'ordre de 50 à 100 jours — la supernova devient totalement ionisée.

Entre t_1 et t_2, la partie neutre de l'enveloppe est opaque au rayonnement X d'énergie supérieure à la limite de Lyman (13.6 eV), et la luminosité X est convertie en chaleur, produisant une température inférieure ou de l'ordre de 10^4 K : les corrections bolométriques sont faibles et on observe un plateau de luminosité, $L_{opt} = L_X$.

A l'instant t_2, l'enveloppe est totalement ionisée, transparente, et sa température monte jusqu'à 10^6 K environ ; les corrections bolométriques sont très grandes et la luminosité visible chute brutalement par un facteur de l'ordre de 100. Au-delà de t_2 on attend une décroissance de L_{opt} en $1/t^3$.

Remarquons la valeur élevée — 10^{45} ergs/s — de la luminosité totale nécessaire à ce modèle.

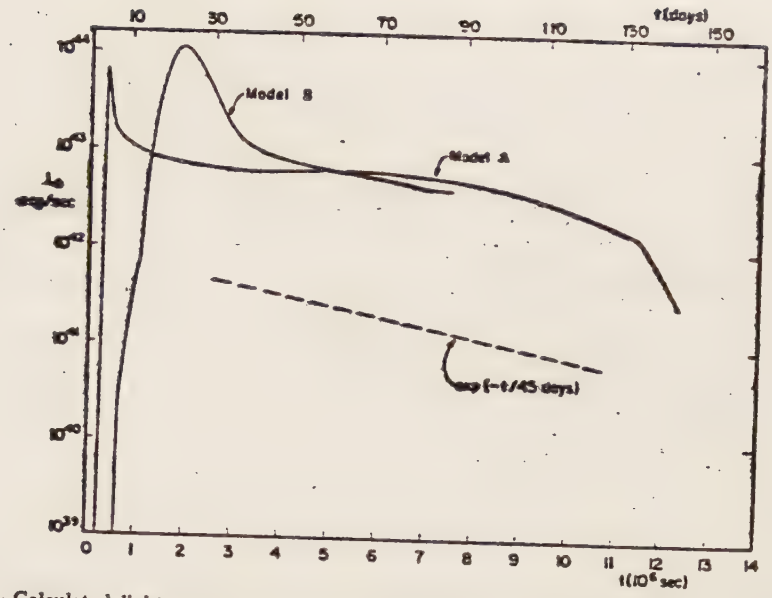
Légende des figures

Fig. 1 : Courbes de lumière calculées par Falk et Arnett (1973) pour les SN II. Le "modèle B" conduit à une courbe de forme convenable, et correspond au cas où la pré-supernova est entourée d'une enveloppe circumstellaire géante.

Fig. 2 : Courbe de lumière calculée par G. Lasher (1975) pour les SN I. La forme du pic reproduit très bien les données de Barbon, Ciatti et Rosino.

Fig. 3 : D'après Morrison et Sartori (1969). Lieu des points à partir d'où le rayonnement de fluorescence atteint l'observateur (O) à un instant donné t.

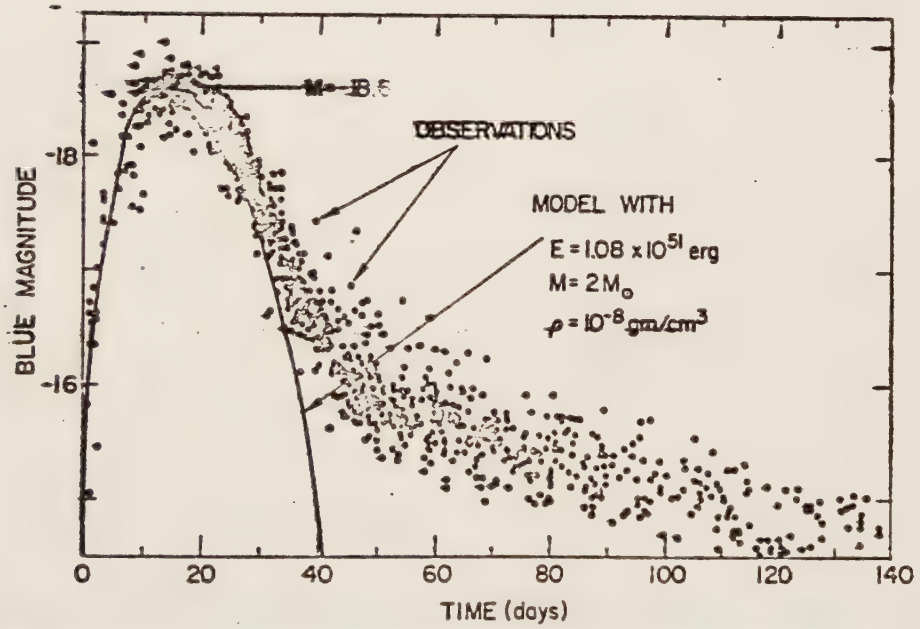
Fig. 4 : Modèle de fluorescence de Morrison et Sartori. Dans le cas le plus simple (zône de fluorescence de densité homogène, pulse $\delta(t)$ de rayonnement X-UV), on obtient des exponentielles intégrales ($E_1 (t/\tau)$) pour les courbes de lumière (courbes en traits pleins).



—Calculated light curves for the two models. Model A has initial density structure similar to that of a Paczyński red giant, while Model B also includes a circumstellar "shell." L_b is the bolometric luminosity. The dashed line indicates the appearance of a purely exponential decline. Crude bolometric corrections (for a blackbody) give approximate values for the peak visual magnitudes: for Model A, $M_v \sim -17.3$ at $t \simeq 50$ days; and for Model B, $M_v \sim -18.9$ at $t \simeq 22$ days.

Fig. 1

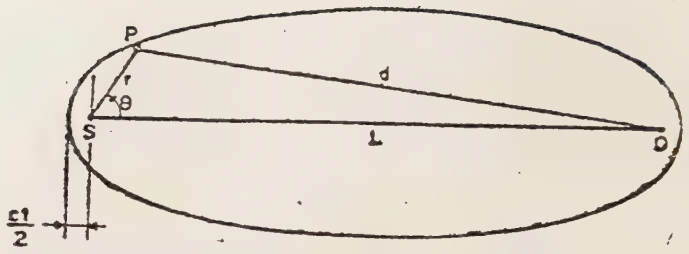
(d'après Falk et Arnett, 1973)



The blue magnitude light curve of a particular model compared with the observations of 38 Type I supernovae as plotted by Barbon *et al.* 1973.

Fig. 2

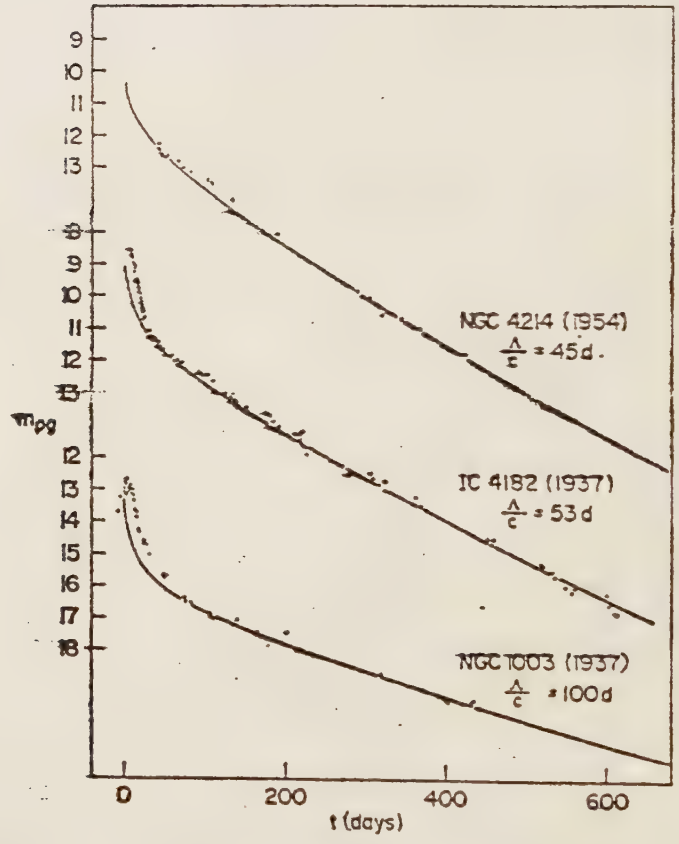
(d'après G. Lasher, 1975)



Locus of points from which secondary radiation reaches the observer O at a given time t, for a δ-function primary pulse originating at point S; t is measured from the arrival of the direct signal, i.e., from a time L/c after the explosion. The surface is an expanding ellipsoid: $r + d = L + ct$.

Fig. 3

(d'après Morrison et Sartori)



Theoretical fit on the basis of the simplest model—uniform density, δ-function excitation pulse, and a single absorption line—to the photographic light curves of Type I supernovae in NGC 4214 (Wild 1960), IC 4182, and NGC 1003 (Baade and Zwicky 1938). Below the identification of each supernova is the value of the parameter Λ/c in the luminosity function, $\Psi(t) \sim E_1(ct/2\Lambda)$.

Fig. 4

(d'après Morrison et Sartori)

Section II : Description du modèle proposé.

Nous avons vu que l'hypothèse d'Ostriker et Gunn, suivant laquelle le pulsar produit l'énergie rayonnée par la supernova, permet de résoudre le problème des pertes adiabatiques d'une façon très naturelle et vraisemblable, car les pulsars sont presque certainement produits au cours d'une explosion de supernova et la théorie prévoit que leur luminosité peut atteindre aisément les valeurs nécessaires, de l'ordre de 10^{43} ergs/s.

L'hypothèse suivant laquelle le pulsar provoque également par sa pression l'éjection de matière se heurte au contraire à des difficultés : nous avons vu dans la section I que les vitesses d'expansion calculées restent faibles même en admettant des puissances élevées, de 4.10^{44} ergs/s ; en outre, la courbe de lumière calculée ne correspond ni par la forme ni par l'intensité aux courbes typiquement observées.

D'autre part, Bodenheimer et Ostriker ont admis que les ondes rayonnées par le pulsar étaient immédiatement absorbées et leur énergie transformée en chaleur — soit directement, soit par l'intermédiaire de l'accélération de particules. Nous montrons dans ce qui suit que cette hypothèse n'est peut être pas justifiée ; en particulier le processus d'absorption habituel pour des ondes de basse fréquence, c'est à dire l'effet Joule à l'interface avec le milieu ionisé, est totalement inefficace du fait de la densité élevée du milieu ; nous montrons également ci-dessous que l'accélération de particules provenant de l'enveloppe éjectée reste négligeable tant que la température n'a pas décru suffisamment.

1) Mécanisme d'accélération des ions et influence de la température sur l'absorption des ondes de basse fréquence.

L'enveloppe injecte de façon continue des atomes dans la cavité, animés de la vitesse thermique v_{Th} ; les ions ne peuvent y pénétrer car ils sont repoussés immédiatement par les ondes de basse fréquence. Ces atomes finissent par être ionisés par le rayonnement thermique ambiant après un temps moyen θ_i, qui n'est fonction que de la température pour un élément chimique donné; ils sont alors accélérés vers l'extérieur par les ondes du pulsar.

Il se forme donc un "nuage" de particules neutres entre la cavité et l'enveloppe éjectée (voir fig. 1) ; son épaisseur δ — généralement très faible par rapport au rayon R_1 de la cavité — est $\delta \sim v_{Th} \cdot \theta_i$. L'énergie communiquée aux ions est évidemment fonction de la longueur δ du parcours d'accélération ; δ ne dépend que de la température T, et c'est une fonction très rapidement décroissante de T : d'où la conclusion que l'énergie d'accélération est très faible à haute température.

Un autre phénomène intervient pour rendre cet effet encore plus brutal : c'est le fait que les ondes du pulsar — de longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{\Omega}$ — ne peuvent être absorbées efficacement que si l'épaisseur δ de la couche d'atomes neutres est au moins de l'ordre de λ . Pour l'Hélium, qui a le potentiel d'ionisation le plus élevé (I = 24.6 eV) et par conséquent la profondeur de pénétration δ la plus grande, nous obtenons : $\delta = 0.43.10^{-9}$ km $\sqrt{x}$. e^x, avec : x = I/kT ; admettant des

valeurs raisonnables pour la vitesse angulaire Ω du pulsar (1000 à 2000 s^{-1}), on voit que $\delta = \chi$ pour une température de 14000 K environ. L'absorption des ondes du pulsar ne devient donc importante que lorsque la température de la cavité est devenue inférieure à 14000 K.

Le coefficient d'absorption varie très rapidement en fonction de la température, passant pratiquement de 0 à 1 lorsque T varie de 13000 à 11000 K (fig. 2) ; une conséquence très importante est que le pulsar joue le rôle d'un thermostat et stabilise la température de la cavité (T_1) aux environs de 12000 K. Lorsque les pertes de chaleur par diffusion ou par détente adiabatique sont devenues trop importantes, la luminosité totale du pulsar ne suffit plus à maintenir la température, qui décroît rapidement jusqu'à 7000 ou 5000 K en une ou deux semaines (fig. 3 ,4).

2) Description et principales caractéristiques du modèle.

- Aspect hydrodynamique.

Nous admettons ici que l'éjection de matière est dûe à une explosion et au passage d'une onde de choc à travers la pré-supernova, de la façon décrite par Colgate et White ; on sait que l'on obtient ainsi des vitesses d'expansion et des distributions de densité dans l'enveloppe compatibles avec les observations, si l'énergie mise en jeu est suffisante. Cette explosion ne dure qu'un temps très court — quelques heures pour une supergéante de rayon inférieur à 10^8 km — et n'intervient que comme condition initiale dans le calcul des courbes de lumière ;

elle fixe en particulier la forme de la distribution de densité.

L'explosion thermonucléaire a lieu dans une région assez profonde car elle nécessite une température élevée : d'après Colgate elle se produit à un rayon de l'ordre de 10^4 km ; au bout d'une journée, la supernova a atteint un rayon de 10^9 km et l'énergie thermique qu'elle contient est devenue totalement négligeable, ayant diminué par un facteur au moins égal à 10^5. L'énergie thermique décroît cependant de façon moins brutale dans les couches externes et peut jouer un rôle dans la courbe de lumière si la fraction de masse de la pré-supernova extérieure au rayon 10^8 km ($\sim 150\ R_\odot$) est importante.

Nous supposerons que le rayon initial était au plus de l'ordre de 10^8 km, et nous négligerons par conséquent l'effet de la chaleur de l'explosion sur la courbe de lumière.

La supernova étant "froide", chacune de ses parties poursuit son expansion à vitesse constante ; d'autre part, le rayon initial étant négligeable, l'expansion est homothétique et la distribution de vitesse s'écrit : $v = r/t$. D'après Colgate et White la distribution de densité au cours de l'expansion est relativement homogène ; nous avons donc admis une distribution homogène, ayant également en vue d'obtenir les résultats sous forme analytique dans la mesure du possible.

- Effets thermiques et dynamiques du pulsar.

Comme on l'a vu, le pulsar ne joue ici aucun rôle dans l'éjection de matière ; l'énergie cinétique d'expansion W est très supérieure à l'énergie qu'il rayonne pendant la phase optique que nous étudions ici. Ses effets dynamiques ne sont cependant

pas nuls : la pression de son rayonnement crée une cavité de rayon R_1, et une onde de choc (rayon R_S) qui se propage vers l'extérieur à travers l'enveloppe (fig. 1). Du fait de l'expansion homothétique et de la façon progressive dont l'énergie est rayonnée par le pulsar, l'onde de choc reste très voisine du bord de la cavité : le calcul de la solution self-similaire indique en effet : $R_S = 1.012\ R_1$. Toute la matière balayée par le choc est donc comprimée par un facteur 30 environ et concentrée en une mince couche sphérique d'épaisseur relative $\delta R/R \sim \frac{1}{80}$; si la diffusion de la chaleur est importante, la couche est encore beaucoup plus mince et le facteur de compression peut atteindre 10^4. D'autre part, ayant supposé un pulsar de luminosité constante et une enveloppe de densité uniforme, on calcule que le rayon R_1 de la cavité croît en $t^{1.2}$.

Dans le modèle de Bodenheimer et Ostriker, l'onde de choc finit par traverser complètement l'enveloppe car le pulsar est supposé très puissant ; dans notre cas, l'onde de choc n'atteint jamais la surface, et à l'époque du pic de luminosité le rayon R1 de la cavité est typiquement 1/3 seulement du rayon R_o de la supernova ; la vitesse d'expansion de la cavité est alors de l'ordre de 4000 km/s. Ceci pourrait expliquer la disparition de la photosphère au moment où elle traverse les couches de vitesse $v \sim 4000$ km/s, phénomène remarqué par C. Gordon (1972).

Nous avons vu plus haut que le pulsar ne peut accélérer efficacement des ions provenant de l'enveloppe lorsque la température T_1 de la cavité est inférieure à 14000 K environ, et qu'il joue par conséquent le rôle d'un thermostat libérant la

quantité de chaleur juste nécessaire pour maintenir T_1 à ce niveau. Cette phase se poursuit jusqu'à une date t_L (voisine de t_{Max}, date du maximum optique) au-delà de laquelle la puissance du pulsar toute entière ne suffit plus à maintenir la température, qui se met alors à décroître rapidement. Mais on sait que δ, le parcours d'accélération des ions, est fonction très rapidement décroissante de la température : δ augmente ainsi par un facteur 3000 lorsque la température décroît de 14000 K à 10000 K. Les ions sont alors accélérés à des énergies relativistes et ne peuvent plus être freinés dans l'enveloppe : la production de chaleur s'arrête donc à ce moment, et l'énergie rayonnée par le pulsar ne sert plus qu'à produire des rayons cosmiques, stockés sur place ou s'échappant dans le milieu interstellaire.

On observe donc à ce moment une chute de la luminosité ; la théorie de la diffusion prévoit, asymptotiquement, une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique de l'ordre de 10 jours.

3) Principe du calcul de la courbe de lumière.

La principale source d'opacité est la diffusion Thomson, car le milieu est essentiellement constitué d'Hydrogène dans le cas d'une SNII et il est très dilué ; nous obtenons en effet un rayon voisin de 5.10^{10} km à l'époque du pic de luminosité, et la densité moyenne est alors de 10^{10} cm^{-3}.

Schématiquement, la source de chaleur est la cavité centrale maintenue à température constante $T_L \simeq 12000$ K, jusqu'à l'instant t_L ; le système évolue ensuite en l'absence de source de chaleur.

Dans la 1ère phase ($t < t_L$) la puissance calorifique H(t) produite augmente rapidement, car le coefficient de diffusion augmente proportionnellement à t^3 du fait de l'expansion, et la "surface chauffante" $4\pi R_1^2$ augmente en $t^{2.4}$. Cette chaleur produite H(t) peut se décomposer en deux parties : un flux de chaleur sortant de la cavité par diffusion, ou flux de conduction : $\phi_c (R_1)$; et une quantité de chaleur ϕ_L nécessaire pour maintenir la cavité à la température T_L malgré l'accroissement de volume et les pertes adiabatiques. ϕ_L est proportionnel à $R_1^2 \dot{R}_1$, donc à $t^{2.6}$; ϕ_c est la somme de deux termes d'importance comparable et proportionnels à $t^{4.2}$ et $t^{3.4}$ respectivement (voir les variations de ϕ_c en fonction du temps, fig. 5). Les flux ϕ_L et ϕ_c sont eux aussi d'importance comparable, à l'époque du maximum optique.

4) Principe de la détermination du spectre continu. Facteur de dilution.

Nous avons calculé que la supernova est trop diluée à l'époque du pic de luminosité pour que l'absorption free-free soit importante dans le domaine optique ; en outre, l'épaisseur optique Thomson est beaucoup trop faible pour modifier appréciablement la fréquence des photons. Un photon de fréquence ν_o émis par la cavité à l'instant t_o ne peut donc évoluer que suivant la loi adiabatique $\nu(t) = \nu_o \, t_o/t$, jointe aux conditions d'échappement aux rayons R_1 et R_o — ce photon est en effet "détruit" s'il revient en R_1, et re-rayonné avec une distribution de fréquences de Planck correspondant à la nouvelle température $T_1(t)$.

D'autre part, le rayonnement n'étant pas en équilibre thermique dans l'enveloppe est fortement dilué du fait de la diffusion (l'expansion seule ne peut diluer le rayonnement, car un spectre noir reste noir au cours d'une expansion adiabatique, seule la température varie) ; le facteur de dilution w est de l'ordre de $1/\tau$ pour une atmosphère diffusante d'épaisseur optique τ, dans les conditions de l'équilibre radiatif. Ce résultat est en accord avec l'étude de C. Gordon (1972) qui obtient des facteurs de dilution w assez importants, de l'ordre de 1/10 à 1/100. Si le rayonnement est loin de l'équilibre thermique, il devient difficile d'expliquer le fait que le spectre continu soit voisin de celui d'un corps noir ; dans notre modèle, ce fait s'explique pourtant aisément grâce à la présence de la "couche comprimée" qui borde la cavité ($R_1 < r < R_S$) : cette couche est en effet optiquement épaisse pour l'absorption free-free, dont la section efficace est proportionnelle à la densité.

L'existence de facteurs de dilution a d'autre part des conséquences importantes sur l'évaluation du rayon R_{Max} de la photosphère à l'époque du pic de luminosité. Si l'on suppose, comme on le fait généralement, que le rayonnement est en équilibre thermique, on a la relation : $L_{Max} = 4 \pi R_{Max}^2 \sigma T_c^4$, où T_c est la température de couleur observée ; si au contraire le rayonnement est dilué, on a : $L_{Max} = 4 \pi R_{Max}^2 \sigma T_c^4 w$, et il en résulte un R_{Max} supérieur par un facteur $\frac{1}{\sqrt{w}}$ pour une luminosité L_{Max} fixée. C'est pourquoi nous obtenons un rayon $R_{Max} \simeq 5.10^{10}$ km, contre 1 ou 2.10^{10} km dans la plupart des autres modèles ; la date du maximum est ainsi typiquement : $t_{Max} \simeq 50$ jours.

Tenant compte de tous les effets indiqués ci-dessus,

nous avons calculé le spectre continu émergent et les températures de couleur $T_c(B-V)$ correspondantes (voir fig. 6 et 7).

Légende des figures

(figures extraites de l'article "Pulsar theory of SN light curves" ,Gaffet,1975)

Fig. 1 : Représentation schématique d'une supernova : R_0 est le rayon de l'enveloppe, R_1 le rayon de la cavité, R_s le rayon de l'onde de choc produite par le pulsar; δ est l'épaisseur du"jet atomique" d'Hélium neutre émis par l'enveloppe. L'épaisseur $R_s - R_1$ a été très grossie pour devenir visible sur la figure, ainsi que l'épaisseur δ .

Fig. 2 : Coefficient d'absorption maximum (α_1) des ondes rayonnées par le pulsar au cours de leur réflexion sur l'enveloppe (rayon R_1). Le coefficient α_1 est représenté en fonction de la température de la cavité, pour deux valeurs extrêmes de la vitesse angulaire du pulsar (Ω = 500 s^{-1} et 2000 s^{-1}).

Fig. 3 : Température (T_1) de la cavité en fonction du temps "réduit" $\xi = t/\tau_c$. En première approximation T_1 reste pratiquement constant ($T_1 = T_L \simeq 12000$ K) jusqu'à $t = t_L$, puis T_1 décroît rapidement. Nous avons représenté également l'énergie électromagnétique U_{em} contenue dans la cavité, en fonction du temps; au-delà de t_L , U_{em} devient négligeable (dans la mesure où $c \gg \dot{R}_0$).

Fig. 4 : Valeur du "plateau" de température (T_L) en fonction du paramètre sans dimension m qui caractérise la forme de la solution; pratiquement, m varie peu – de 0.3 à 0.7 par exemple . Nous avons tracé les courbes correspondant aux vitesses angulaires $\Omega / 10^3$ s^{-1} = 0.125 , 0.5 et 2. On voit que T_L ne dépend guère que de Ω ; nous obtenons: $T_L / 10^4$ K = 1.2 $\pm$ 0.1.

Fig. 5 : Flux de chaleur sortant de la cavité (rayon R_1) par conduction radiative, en fonction du temps. Les abscisses et les ordonnées sont normalisées à l'unité à l'instant t_L .

Fig. 6 : Spectres calculés (traits pleins) et spectres de corps noir à la température de couleur T_c (tirets), pour une SN II typique.

Fig. 7 : Température de couleur T_c d'après l'indice B–V calculé, en fonction du temps. Nous avons indiqué également l'évolution de la température de la cavité T_1 (tirets).

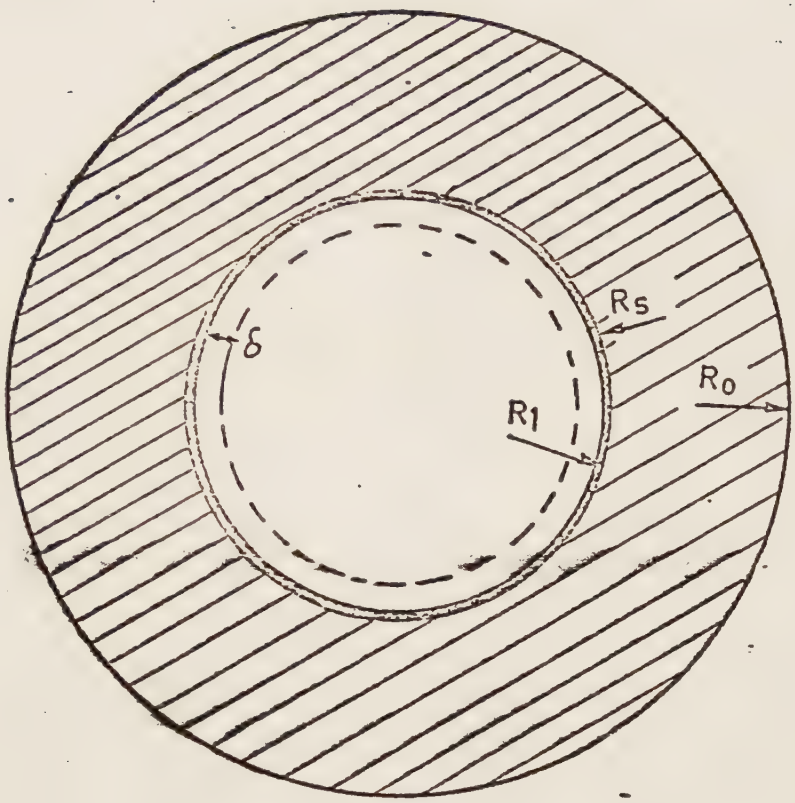


Fig 1

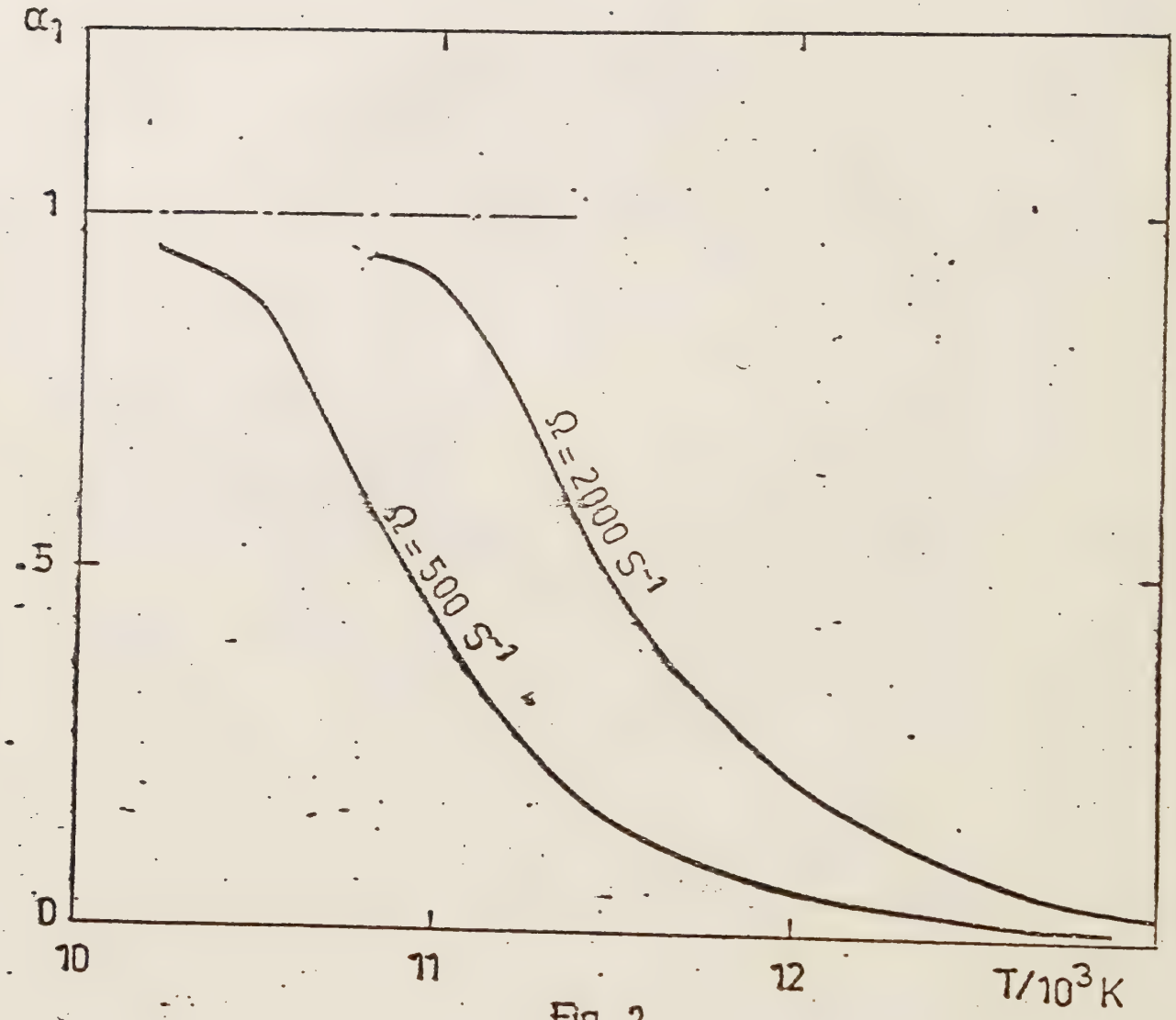


Fig-2

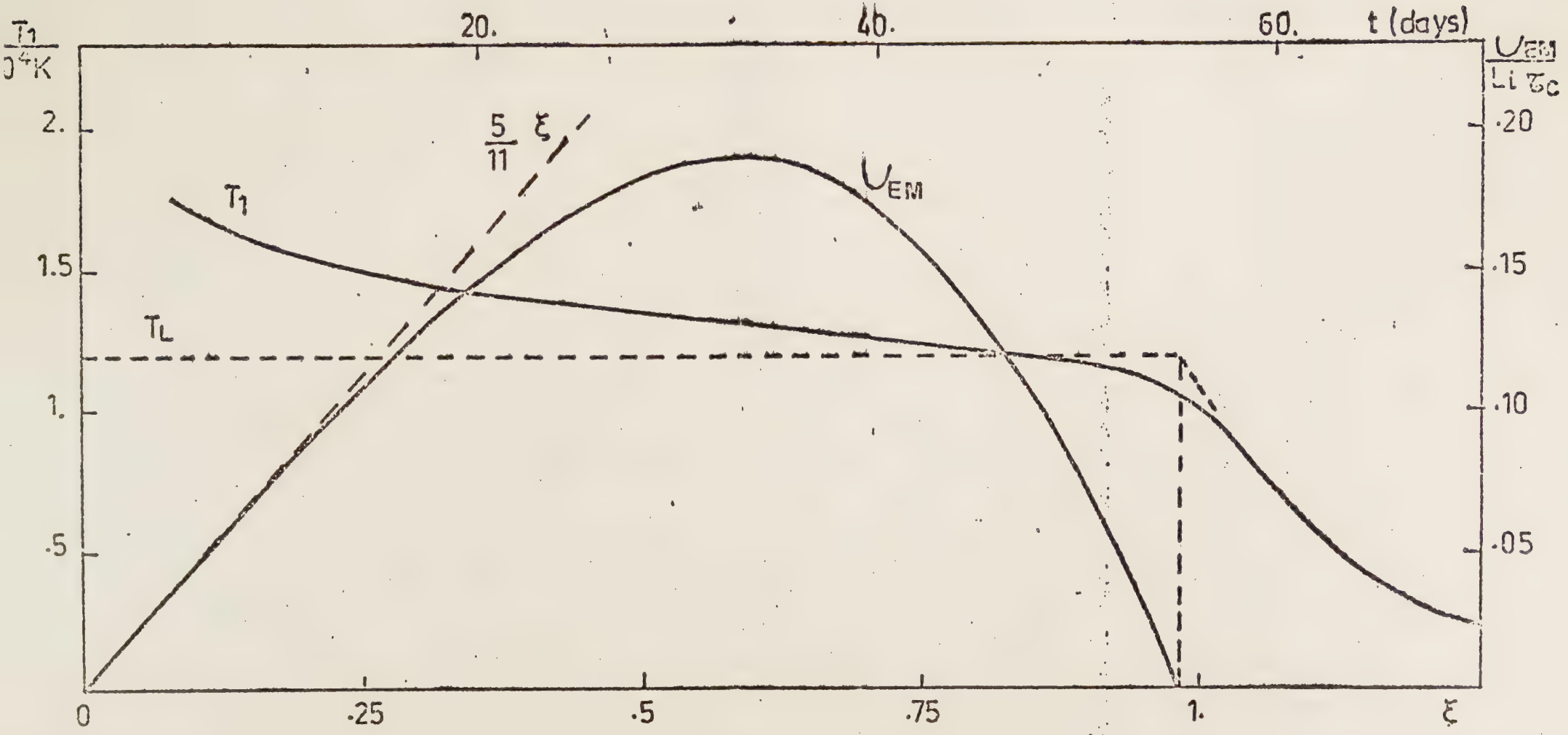

T1
10⁴K
20.
40.
60.
t (days)
U_EM
Li τc
2.
1.5
1.
.5
.20
.15
.10
.05
5/11 ξ
T1
U_EM
TL
0
.25
.5
.75
1.
ξ

Fig – 3

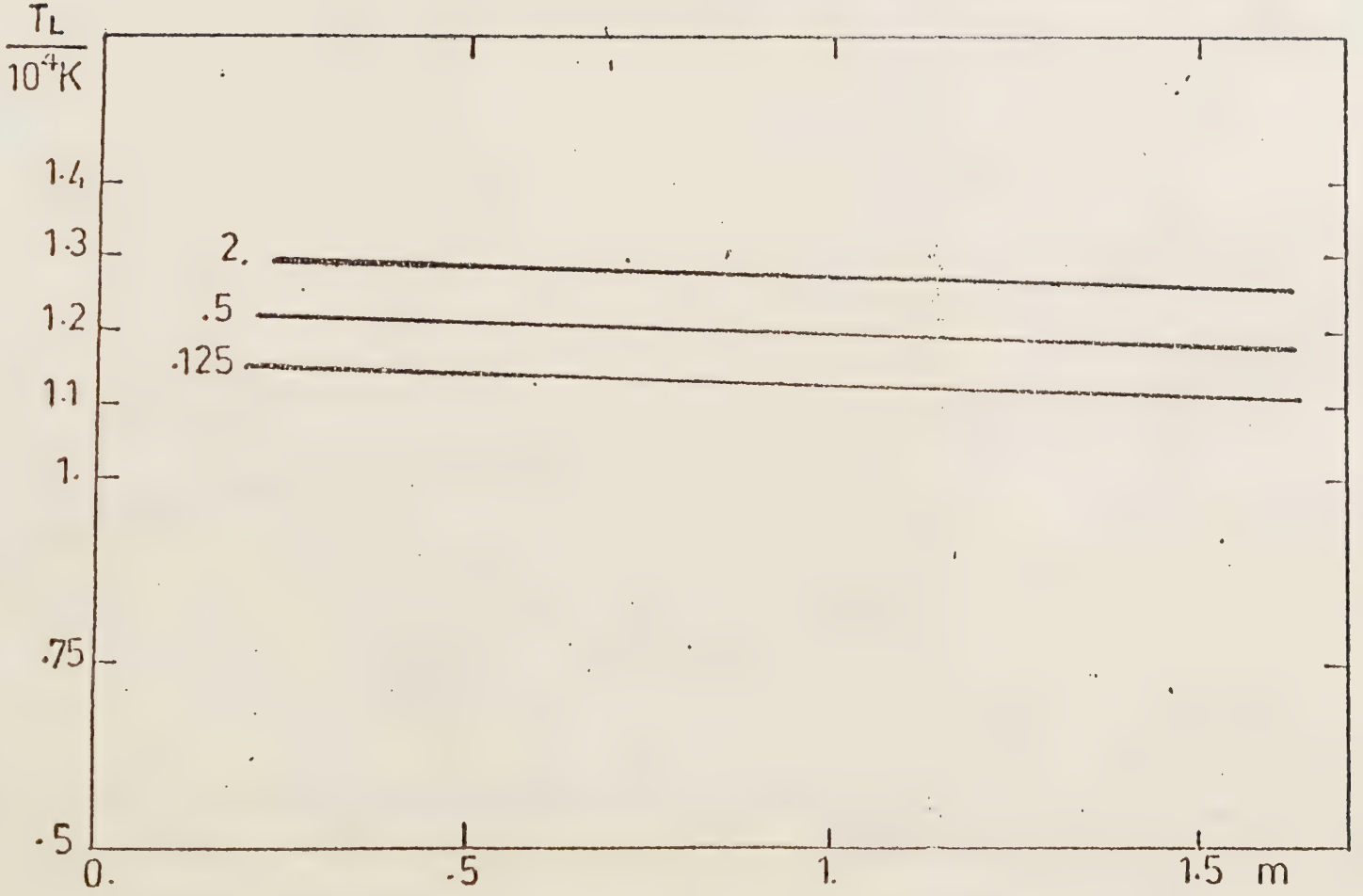


Fig - 4

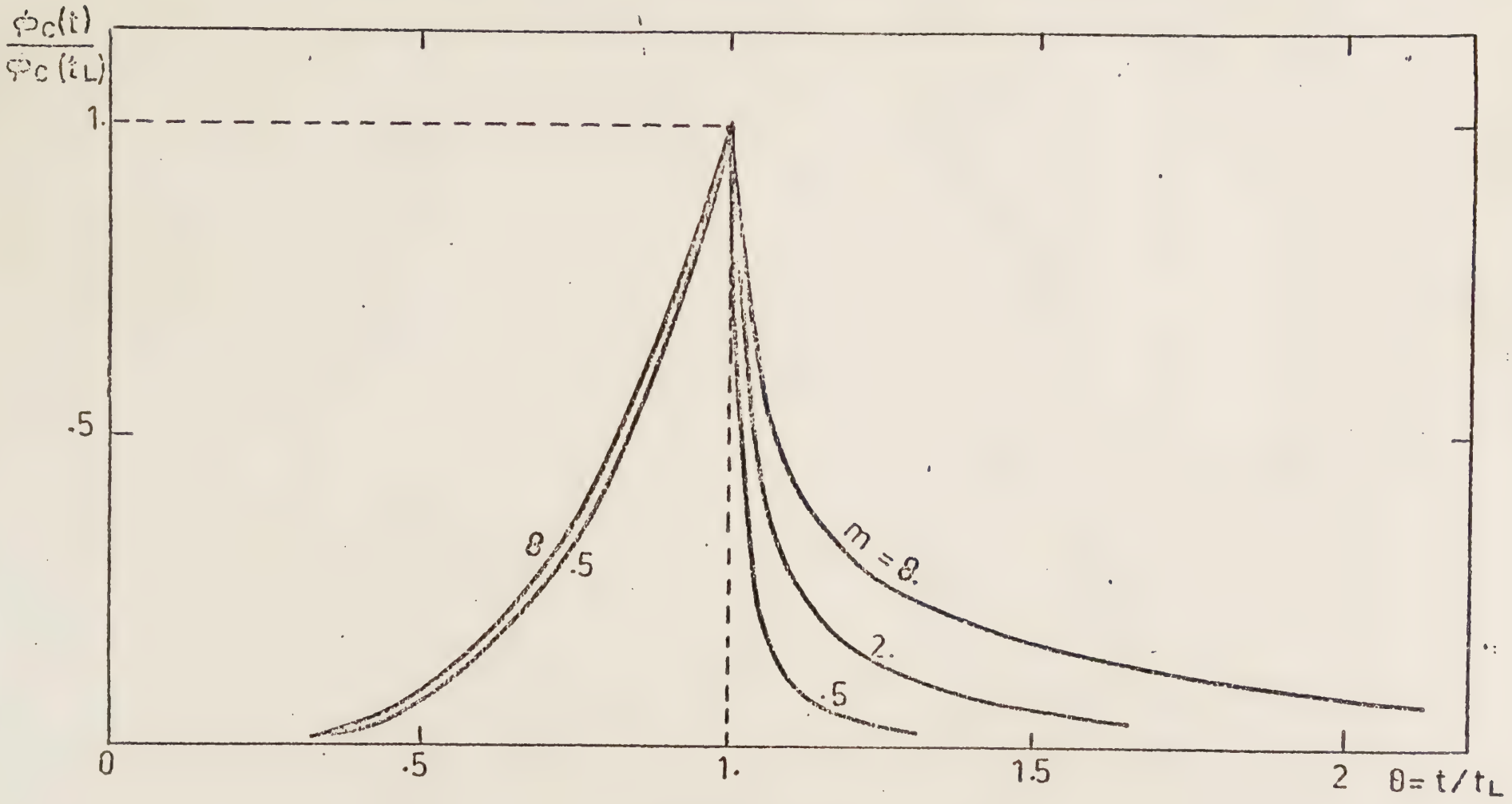


Fig-5

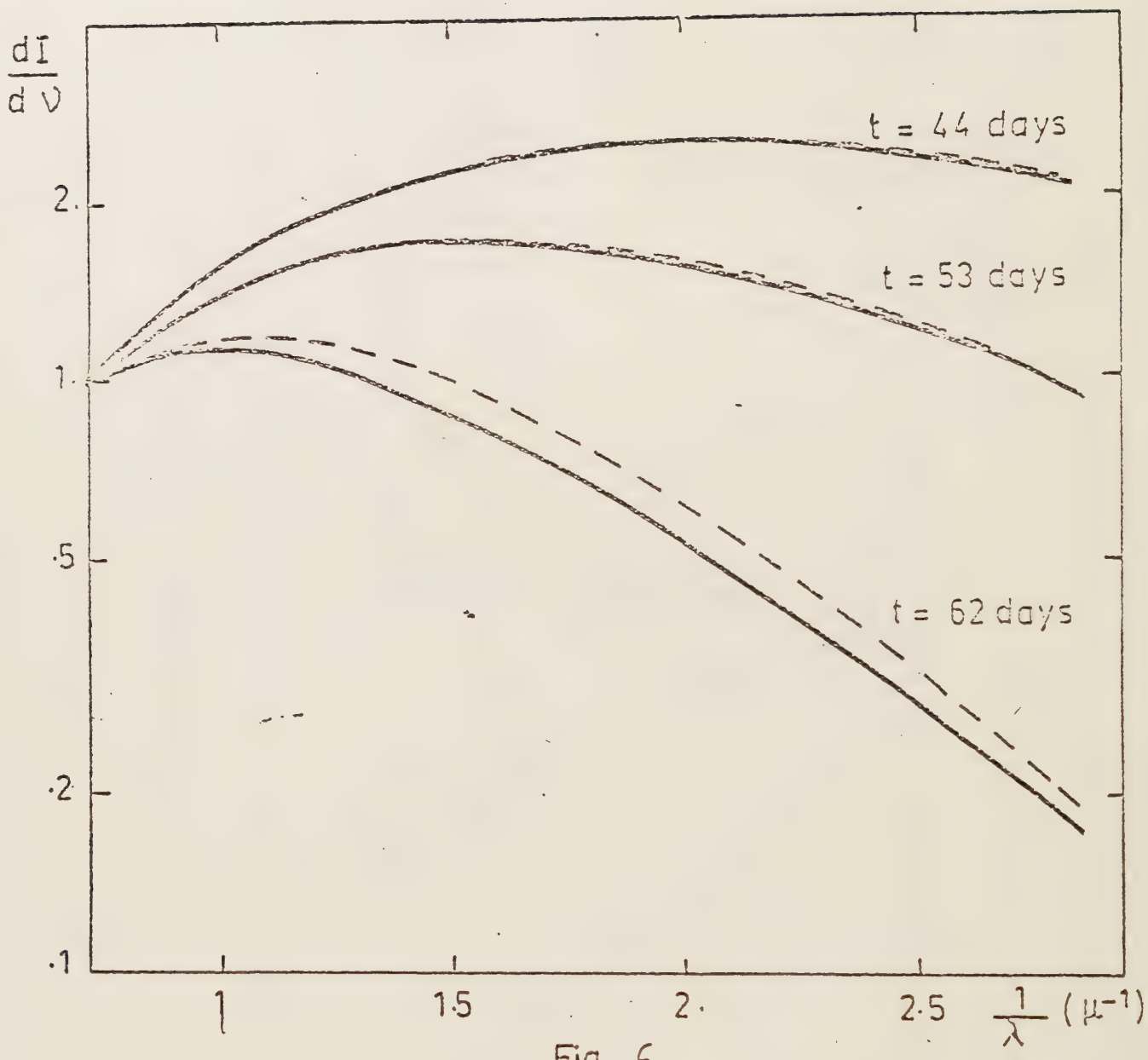


Fig - 6

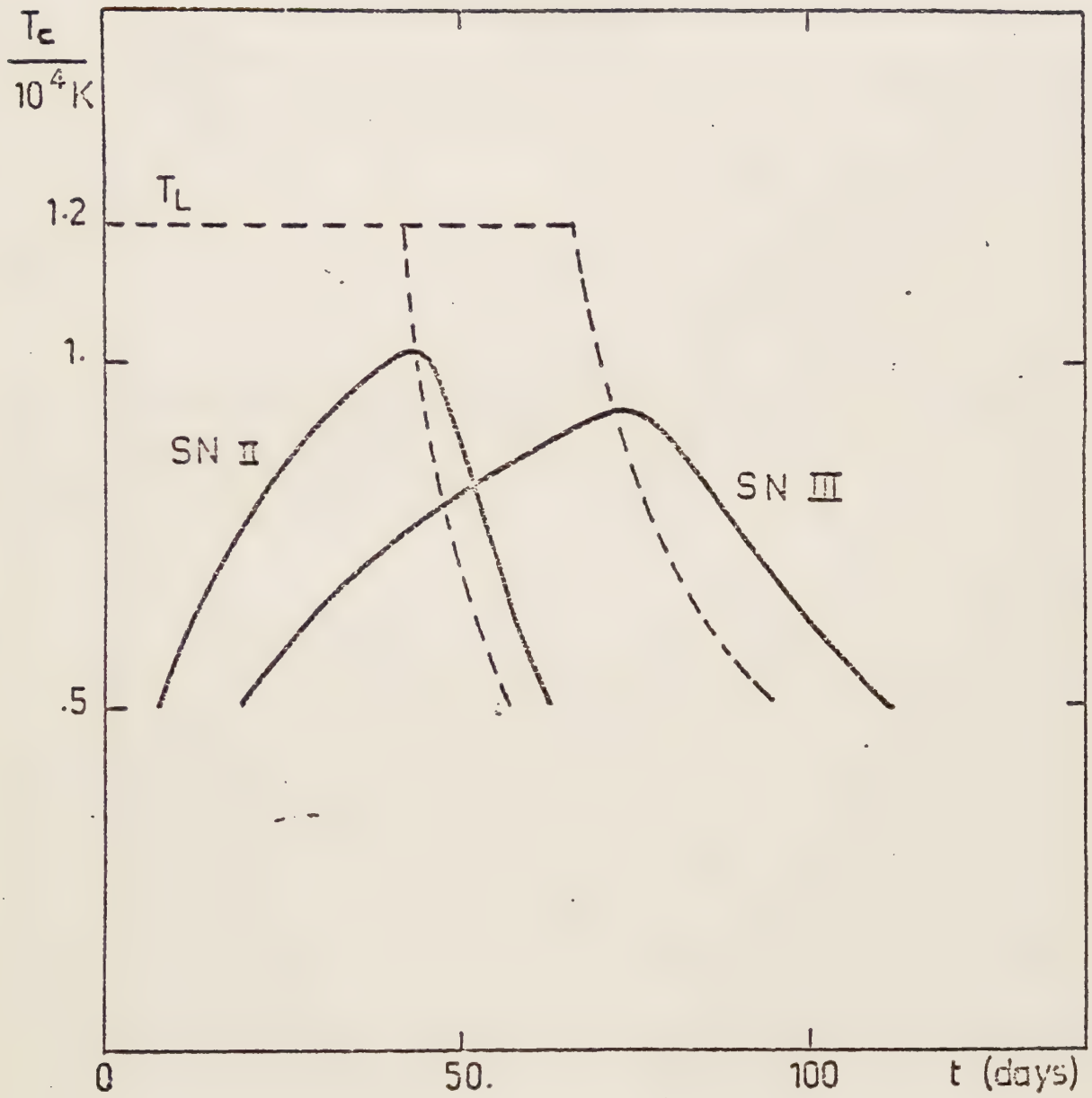


Fig 7

CONCLUSION

Dans la théorie de pulsar des courbes de lumière, les valeurs admises pour l'énergie cinétique d'expansion W $\sim$ 1 ou 2.10^{51} ergs et pour la luminosité du pulsar $L_i \sim 10^{43}$ ergs/s, conduisent à une énergie de rotation $\frac{I\Omega^2}{2}$ du même ordre que W (Ostriker et Gunn 1971) ; on peut donc être tenté de conclure que l'éjection de matière et l'énergie d'expansion sont dûes entièrement à la pression exercée par les ondes du pulsar ; cependant les vitesses d'expansion à l'époque du maximum optique ne dépasseraient guère 2000 km/s au lieu des 15000 ou 20000 km/s qu'on observe en réalité ; en outre l'onde de choc produite par le pulsar dans une pré-supernova initialement au repos rayonnerait une puissance importante — 27/112 L_i —au lieu de $L_i/66$ seulement dans une enveloppe homogène en expansion homothétique, de sorte que la croissance rapide de la luminosité deviendrait difficile à expliquer. Il nous semble donc préférable d'admettre un modèle plus conventionnel dans lequel l'éjection de matière est dûe à une explosion, par exemple le modèle de Colgate et White (1966) ; si la pré-supernova est une étoile ordinaire, de rayon inférieur à quelques U.A., il n'y a alors aucune difficulté à expliquer les grandes vitesses d'expansion observées.

Les modèles expliquant le pic de luminosité par l'émergence d'une onde de choc à la surface (FALK et ARNETT, 1973 ; GRASSBERG et al, 1971) exigent une pré-supernova très étendue, avec un rayon initial de l'ordre de 10^{10} km ($\sim$ 100 U.A.) ; en outre ces modèles impliquent des masses très élevées —plusieurs dizaines de masses solaires — si l'on veut obtenir des vitesses

d'expansion suffisantes.

Le modèle de pulsar "fort" (Bodenheimer et Ostriker 1974), dans lequel l'onde de choc produite par le pulsar traverse complètement l'enveloppe, ne conduit pas à des courbes de lumière satisfaisantes : elles présentent un plateau de luminosité durant plusieurs mois, et la luminosité intégrée $\int L dt$ est beaucoup trop grande.

Dans notre modèle, le pulsar a une luminosité fixée par les observations du maximum optique des supernovae et il est donc trop faible pour que l'onde de choc qu'il produit traverse complètement l'enveloppe. L'énergie thermique qu'il produit au début est très faible, du fait des conditions dynamiques différentes (expansion homothétique) et du fait que les ondes qu'il rayonne sont très peu absorbées par l'enveloppe ionisée. Ceci permet de comprendre la croissance rapide de la luminosité.

Nous avons obtenu ainsi une courbe de lumière très voisine des courbes typiquement observées, avec des paramètres très proches des valeurs généralement acceptées : masse éjectée $2.3\ M_\odot$, énergie totale 2.10^{51} ergs, luminosité maximum $0.6.10^{43}$ ergs/s. Signalons que ce modèle prévoit un rayon presque indépendant des paramètres, à l'époque du maximum : $R_{Max} \simeq 5.10^{10}$ km.

Le spectre continu que nous avons calculé est très voisin de celui d'un corps noir, mais le rayonnement est dilué considérablement du fait de la diffusion. L'évolution dans le temps de la température de couleur est en bon accord qualitatif

avec les observations, décroissant rapidement de $1.0.10^4$K à l'époque du maximum jusqu'à 7000 ou 5000 K en 1 ou 2 semaines.

REFERENCES

Agrawal, D. C. et Sood, P. C. : PR C11 , 1854 (1975)

Arnett, W. D. : Astrophys. Space Sci. 5 ,180 (1969)

Arnett, W. D. et Schramm, D. N. : Ap. J. 184 , L47 (1973)

Becchetti, F. D. et Greenlees, G. W. : PR 182 , 1190 (1969)

Bodenheimer, P. et Ostriker, J. P. : Ap. J. 191 , 465 (1974)

Burbidge, G. , Burbidge, M. , Fowler, W. et Hoyle, F. : Rev. Mod. Phys. 29 , 547 (1957)

Chiu, B. C. et Morrison, P. : Ap. J. 198 , 617 (1975)

Clayton, D. D. , Colgate, S. A. et Fishman, G. J. : Ap. J. 155 , 75 (1969)

Colgate, S. A. et Johnson, H. J. : Phys. Rev. Letters 5 , 235 (1960)

Colgate, S. A. et McKee, C. : Ap. J. 157 , 623 (1969)

Colgate, S. A. et White, R. H. : Ap. J. 143 , 626 (1966)

Courant, R. et Friedrichs, K. O. : "Supersonic flow and shock waves" (New-York, Interscience) (1948)

Dreicer, H. : Physics of Fluids 7 , 735 (1964)

Falk, S. W. et Arnett, W. D. : Ap. J. 180 , L65 (1973)

Fowler, W. A. et Hoyle, F. : Ap. J. Suppl. 9 , 201 (1964)

Goldberger, M. L. : PR 74 , 1269 (1948)

Gordon, C. : Astron. and Astrophys. 29 , 123 (1973)

Grassberg, E. K. , Imshennik, V. S. et Nadyozhin, D. K. : Astrophys. Space Sci. 10 , 28 (1971)

Gunn, J. E. et Ostriker, J. P. : Ap. J. 160 , 979 (1970)

Hofmeister, E. , Kippenhahn, R. et Weigert, A. : Zs. f. Astr. 60 , 57 (1964)

Hoyle, F. : Mon. Not. 106 , 343 (1946)

Hoyle, F. et Fowler, W. A. : Ap. J. 132 , 565 (1960)

Imshennik, V. S. et Morozov, Y. I. : Probl. Math. Tech. Fiziki 2 , 8 (1964)

Imshennik, V. S. et Nadyozhin, D. K. : "On supernova flares" published in "Relativistic Astrophysics", Nauka, Moscou (ed. Y. B. Zeldovich et I. D. Novikov) (1967)

Juliusson, E. : 14th Cosmic Ray Conf. , Munich (1975), Vol. 12, p. 4138

Kirshner, R. P. , Willner, S. P. , Becklin, E. E. , Neugebauer, G. et Oke, J. B. : Ap. J. 180 , L97 (1973)

Kulsrud, R. M. , Ostriker, J. P. et Gunn, J. E. : Phys. Rev. Letters 28 , 636 (1972)

Lasher, G. : Ap. J. 201 , 194 (1975)

Meyer, J. P. et Cassé, M. : 14th Cosmic Ray Conf. , Munich (1975) Vol 12, p. 4144

Minkowski, R. : Ann. Rev. Astron. and Astrophys. 2 , 247 (1964)

Morrison, P. et Sartori, L. : Ap. J. 158 , 541 (1969)

Ostriker, J. P. et Gunn, J. E. : Ap. J. 157 , 1395 (1969)

Ostriker, J. P. et Gunn, J. E. : Ap. J. 164 , L95 (1971)

Paczynski, B. E. : (1968)

Paczynski, B. E. : Acta Astronomica 20 , 47 (1970)

Rees, M. J. : Astrophys. Letters 6 , 55 (1970)

Rocchia, R. , Ducros, R. et Gaffet, B. : à paraître Ap. J. (1976)

Schramm, D. N. et Arnett, W. D. : "The weak interaction and gravitational collapse" , preprint (1975)

Sedov, L. I. : "Similarity and dimensional methods in Mechanics" New-York Academic Press (1959)

Shklovsky, L. S. : "Supernovae", ed. Wiley Interscience, London (1968)

Zwicky et Baade : (1934)

Zwicky, F. : "Stellar Structure", in "Stars and Stellar Systems" (ed. L. H. Al et D. B. McLaughlin) Univ. of Chicago Press.

Submitted to The Astrophysical Journal

APPENDICE I

PULSAR THEORY OF SUPERNOVA LIGHT CURVES

I. DYNAMICAL EFFECT AND THERMALIZATION OF THE PULSAR STRONG WAVES

Bernard GAFFET

Division de la Physique, Section Etudes Spatiales
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, B.P. 2
91190 Gif-sur-Yvette (France)

Received

Subject headings : Supernovae - Pulsars

ABSTRACT

We have studied in this paper the dynamical effect of a pulsar on a surrounding supernova envelope, and the process of thermalization of the pulsar strong waves, in view of applying the results to the calculation of the light curves of supernovae.

The shock wave induced by the pulsar radiation pressure is studied by means of self-similarity methods, and the results are presented in closed form for the simple case of an homogeneous density distribution in the ejected envelope.

We show that, due to the high density of the shocked region, the pulsar waves are totally reflected by the S.N envelope, unless some unclassical absorption process sets in ; we propose as the main absorption process particle acceleration by the strong waves ; we show that this type of absorption can occur only after some cooling has taken place and in fact the pulsar acts as a thermostat, keeping central temperature fixed around $1.3.10^4$K.

The light curves have been calculated according to these assumptions in the accompanying paper : a good fit of the typical SN II light curve has been obtained ; furthermore, the shape of the continuous spectrum and the observed temperatures of about $1.0.10^4$K near maximum can be explained easily in this model.

INTRODUCTION :

Pulsars are generally believed to be the remnant of a supernova explosion (Gunn and Ostriker, 1970 ; Colgate, 1971 ; Arnett, 1969) and the pre-supernova star should have a mass in the range 4-8M⊙ (Paczynski, 1970 ; Gunn and Ostriker, 1970 ; Bodenheimer and Ostriker, 1974) or even higher (Arnett and Schramm, 1973). As is well known, several mechanisms have been proposed to explain the supernova event : fast (explosive) thermonuclear burning as the final step of stellar evolution and nucleosynthesis, or collapse due to endothermic reactions like photodisintegration of Fe into α particles, or gravitational collapse, etc ... However, a SN event initiated by a collapse meets always with some difficulty in ejecting the outer envelope of the star ; the pressure of neutrinos from the core might be the answer to this problem

Ostriker (1971) proposed a model in which the ejection of matter is due to the radiation pressure from the neutron star, and the light curves which follow from this assumption have been calculated later (Bodenheimer and Ostriker, 1974).

Let us recall that the light curves of supernovae cannot be explained by a pure diffusion mechanism of the heat released by the explosion : adiabatic losses due to expansion are too fast (Ostriker and Gunn, 1971 ; Colgate and McKee, 1969) ; there must be a heating source, acting during the whole optical phase of the S.N. However, adiabatic losses can be made very small if the initial radius of the S.N. is assumed to be large, about 10^4 R⊙ or 10^{10} km, i.e. about the size of the S.N. at the time of optical maximum. In order that the rise time of the light curve be not too large, it is then necessary to assume that heat is, at first, transported throughout the envelope by a shock wave. (Grasberg and Nadezhin, 1970 ; Grasberg et al., 1971 ; Falk and Arnett, 1973).

In the model of Ostriker, the pulsar is a very satisfactory solution to the problem, since it can produce the right amount of electromagnetic energy, soon transformed into heat in the envelope. However, the calculations of Bodenheimer and Ostriker (1974) do not show the rapid rise of luminosity before maximum, with a time-scale of order one week (Colgate et al., 1969 ; Shklovsky, 1968 ; Lecce Conf. 1973) ; furthermore, the width of maximum is far too large for a typical SN II.

In view of the fact that the calculated maximum takes place about 50 to 80 days after explosion for a SN II (Gordon, 1973) the rapid rise is very hard to understand.

However, Bodenheimer and Ostriker assumed implicitly that the power radiated by the pulsar is at once fully transformed into heat ; the validity of this assumption depends of course on the physical conditions at the interface between radiation and the SN shell (radius R_1, fig. 1), and will be discussed here.

In this paper, we forsake the hypothesis that the pulsar is responsible for the ejection of matter, mainly for two reasons : first of all, the expansion velocities observed during the optical phase, i.e. a few month after explosion, are very high and are about the same than in young supernova remnants, like Cas. A, Tycho, etc...; this seems to contradict the fact that pulsars should deliver their energy to the surrounding medium only progressively, with a timescale of the order of years at least. Second, the ejection velocity calculated by Bodenheimer and Ostriker is rather low ($\sim$ 7500km/s instead of the observed 1 to 2 $.10^4$ km/s), even with rather extreme values of the peak luminosity ($\sim 4.10^{44}$ ergs/s) ; this is a common feature of all models, like the model of Falk and Arnett, which assume a very extended pre-supernova envelope ; in that case, the efficiency for the conversion of heat into kinetic energy is always low. Finally, we may note that

the analysis of C. Gordon (1973) based on the Doppler shifts of the Balmer and Paschen series during the optical phase of type II supernovae, seems to indicate an extended mass distribution rather than a thin shell type distribution.

Our assumption is then, as in the work of Colgate and White (1966), that a shock wave reaches the surface of an ordinary star (with radius not larger than a few A.U.) ; starting from such a compact initial state, the conversion of thermal energy into kinetic energy is nearly 100%, and there is no difficulty in obtaining velocities as high as the observed ones.

We do not need to consider in this paper the mechanism responsible for the explosion : we only assume that it happens in a compact state, and consequently in a short time (at most a few hours), so that it enters only as an initial condition in our problem.

The dynamical effects of the pulsar are studied in this context : it creates a cavity and makes a shock wave propagate through the S.N. envelope ; this shock stays always very near the cavity radius R_1, and never reaches the outer part of the supernova (See Section I, 2, 3, 4).

The structure of the ejecta is then the following : a rather dilute envelope in differential expansion, the outer parts going faster than the inner ; at its base, the ejected material which would fill in the sphere of radius R_1 if there were no pulsar, has been pushed out and lies now in a thin shell between the cavity radius (R_1) and the shock wave radius (R_s) ; its density is much larger than the average density of the supernova, by a factor $\frac{R_1}{3(R_s-R_1)} \sim 10^4$ (see Section I,5).

We now come to the main point of this paper : the compressed shell (R_1, R_s) has a very high electrical conductivity, being made of ionized matter at high density ($\sim 10^{15}$ cm^{-3}) ; as a consequence, it will act like a perfect metallic mirror for the low frequency pulsar waves, the absorption coefficient being of the order of 10^{-5} (Section II, 1). At the beginning, the pulsar waves are therefore not thermalized, but they accumulate into the cavity, making an enormous "reservoir" of electromagnetic energy, up to the time when some absorption process sets in ; from this time on, the energy stored in the cavity is converted into heat, and the supernova becomes visible.

The absorption process in question is likely to be temperature dependent : for example, at low temperature, the ions will recombine and the conductivity will drop ; the effect of the pulsar will be then to tend to stabilize the cavity temperature T_1 at some equilibrium temperature T_L where the heat losses and gains are equal.

The absorption process that we propose is suggested by the accelerating properties of the pulsar waves (Gunn and Ostriker, 1969 ; Kulsrud et al., 1972 ; Salvati, 1974) : any charged particle present inside the cavity will be accelerated by the waves and pushed out of the cavity, so that only neutral particles (atoms) are allowed to penetrate into the cavity. There are indeed many neutral atoms in the shocked region, between R_1 and R_s : namely all He atoms, and more generally, all atoms with comparable ionization potential (Section I, 5) they can diffuse freely into the cavity, until they are ionized by the ambient black-body radiation ; they are then accelerated and slowed down in the envelope.

The S.N. shell is therefore preceded by a very thin and tenuous cloud of neutral atoms, with thickness $\delta \sim V_{Th} \cdot \theta_i$, where V_{Th} is the

thermal velocity and θ_i the average time for ionizing an atom in a black-body radiation.

The length δ is then just a function of temperature, which is calculated in section II for the He atom (we choose He for it is the most abundant element with the highest ionization potential, thereby giving the largest thickness δ). This neutral sheet is, in our model, the place where electromagnetic energy is changed into kinetic energy of accelerated ions, which are slowed down very soon in the envelope since their energy is not large. It may be considered as an absorbing layer, and we know that it cannot absorb efficiently when its thickness δ is less than a wave length, $\lambda\!\!\!^{-} = c/\Omega$.

Typically, $\lambda\!\!\!^{-}$ is of order 10^2 km and δ, which is only a function of temperature, happens to be of that order at a temperature of 1.3 to 1.4 . 10^4 K (this range of temperatures is very narrow, due to the fact that δ is a very rapidly varying function of temperature). The consequences are the following :

1) The radiation from the pulsar is transformed into heat only when the temperature T_1 at the interface is lower than about 1.3. to $1.4.10^4$ K. Otherwise, it is merely reflected back by the envelope and stored in the central cavity.

2) The pulsar is then acting as a thermostat, and heat diffusion must satisfy a boundary condition : $T_1 = T_L$ at radius R_1, where T_L is of order $1.3.10^4$ K.

In the accompanying paper (paper II), we calculate the light curve and the continuous spectrum under these assumptions : the resulting rise-time, time integrated luminosity, peak luminosity and also the colour temperature are then in good agreement with the observations, when the central pulsar has a "luminosity" $L \simeq 10^{43}$ ergs/s, whic corresponds to an angular velocity Ω of order : 2.10^3 s^{-1}. In fact, a

satisfactory fit of the "typical" SN II light curve from Shklovsky (1968) can be obtained. The calculated spectrum is very nearly a(diluted) black-body spectrum, and the colour temperature drops sharply within a few weeks after maximum from $1.0.10^4$ K down to about 5.10^3 K, a behaviour which agrees very well with recent observations (Kirshner et al., 1973).

In this paper, (paper I), we deal only with the dynamical aspect of the problem (Section I), and with the problem of the reflection coefficient of the pulsar waves (Section II). In Section I, we show that the ejecta (outside the shock radius R_s) are in homologous expansion, as a result of the rapid cooling of the envelope and of the compactness of the pre-supernova. The shocked region is studied, in the adiabatic case, by means of a self-similarity solution which is shown to exist when the density distribution is a power law function of radius ; for an homogeneous distribution, we find : $R_s/R_1 \simeq 1.01$; however the shock becomes soon isothermal, in which case the shock and cavity radii are the same.

The expansion of cavity is determined in particular for the two limiting cases where the pulsar waves are totally reflected or totally absorbed at the interface (R_1). Finally, the physical state of the shocked region is studied : thickness, density, temperature, ionization equilibrium. We show that, during the epoch of interest for the light curve, H is essentially ionized, and He is neutral ; furthermore we shall see in paper II that the opacity for free-free absorption is large, and this accounts for the nearly black-body shape of the spectrum in the optical, since the source of heat is in the cavity.

In Section II, we first calculate the reflection coefficient of the interface (R_1) for the pulsar low frequency waves, assuming the waves weak enough so that the linear theory is applicable, and using the results of Section I. Next, we show that the linear theory is

indeed valid, due to the high conductivity of the shocked region : the electron velocity is non relativistic and the approximation of linear trajectories is valid (the velocity is in fact less than $\sim 10^{-6}$c). As already stated, the resulting absorption coefficient is of order 10^{-5}, and therefore completely negligible.

We introduce finally the absorption by the layer δ of He atoms at the interface R_1, and calculate the absorption coefficient, which is a very rapidly varying function of temperature, increasing from nearly 0 to 1 between 1.2 and $1.4.10^4$K. The consequence is, as described in paper II, that the pulsar stabilizes the cavity temperature around these values, as long as the energy losses of the system do not exceed the pulsar luminosity.

I. DYNAMICS

According to our view, an explosion has occurred at time $t = 0$, ejecting a mass M_s out of the total mass M_i of the pre-supernova, which had a "small" radius R_i ($R_i < 10^8$ km) ; a pulsar of mass M_p is left. Assuming $M_p = 1.4$ Mo and $M_i \gtrsim 4$ Mo, this would imply an ejected mass $M_s \gtrsim 2.6$ Mo. The total kinetic energy W of the ejecta is of order of a few times 10^{51} ergs, as deduced from the estimated energies of older SNR ; this is also compatible with the observed expansion velocities and an ejected mass of a few Mo.

1) Homologous expansion :

Forgetting the effect of the pulsar, the ejecta are expanding under the action of two forces : gravitation, and the pressure forces which arise from the high temperature of the system. For expansion velocities of order of 10^4 km/s, gravitation becomes negligible as soon as 1 mn after explosion. The effect of pressure decreases also rapidly as a result of adiabatic cooling due to the expansion ; the thermal energy of the ejecta decreases indeed (assuming for simplicity homologous expansion), as :

$$U(t) = W \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^{3(\gamma-1)}$$

where R_o is the S.N. radius at time t (Gull, 1973) ; $\gamma = 4/3$ if the thermal energy is mainly in the form of radiation, or 5/3 if not. Even for $\gamma = 4/3$, we see that U(t) becomes negligible ($U < W/10$) when $R_o > 10\ R_i$, or $R_o > 10^9$ km, i.e. about 1 day after explosion ; in our model, the peak luminosity occurs about 50 days after explosion (see paper II, and C. Gordon, 1973).

All forces being negligible, expansion goes on without acceleration ; furthermore for $t \gg 1$ day, we can neglect the initial radius

R_i of the supernova ; we have therefore an homologous expansion with a velocity distribution :

$$v = \frac{r}{t} .$$

The hydrodynamical problem (taking account of pressure forces) can be simplified by the similarity method, for the case of an adiabatic homologous expansion (Gull, 1973) : let $R_o(t)$ be the outer radius of the S.N., $\lambda = \frac{r}{R_o(t)}$ the Lagrange coordinate ; we may write the thermodynamical variables in the form :

$$\begin{cases} r = \lambda R_o(t) \\ v = \lambda \dot{R}_o(t) \\ \rho = \frac{M}{R_o^3} g(\lambda) \\ P = (\gamma-1) \frac{U(t)}{R_o^3} \pi(\lambda) \end{cases} \qquad (1.1)$$

with the normalization conditions on $g(\lambda)$ and $\pi(\lambda)$:

$$\begin{cases} \int \lambda^2 g(\lambda) \, d\lambda = \frac{1}{4\pi} \\ \int \lambda^2 \pi(\lambda) \, d\lambda = \frac{1}{4\pi} \end{cases} \qquad (1.2)$$

The Euler equation is equivalent to the system :

$$\begin{cases} M R_o \ddot{R}_o = k(\gamma-1) U(t) \\ \frac{d\pi}{d\lambda} = - k \lambda g(\lambda) \end{cases} \qquad (1.3)$$

where k is an integration constant. From eq. (1.2) and (1.3), one finds : $\frac{1}{k} = \frac{4\pi}{3} \int \lambda^4 g(\lambda) \, d\lambda$.

The kinetic energy is : $K = \frac{3M}{2k} \dot{R}_o^2$, and the thermal energy : $U(t) = W \left(\frac{R_i}{R_o} \right)^{3(\gamma-1)}$. The condition of energy conservation : $K + U = W$

gives then the law of expansion of the system :

$$\frac{3M}{2k}\,\dot{R}_o^2 = W\left\{1 - \left(\frac{R_i}{R_o}\right)^{3(\gamma-1)}\right\}. \qquad (1.4)$$

The function $R_o(t)$ has been calculated by Gull (1973) for $\gamma = \frac{4}{3}$ and $\frac{5}{3}$. After adiabatic cooling, $\dot{R}_o \longrightarrow \sqrt{\frac{2k}{3M}\,W}$, $R_o \sim \dot{R}_o t$.

We shall always use this approximation in the following, since the cooling is so fast.

Mass distribution :

According to Colgate (1966) and Gordon (1973), the spectrum of the ejecta is of the form : $\frac{dM}{dv} \sim \frac{1}{v^n}$, with $n \simeq 0$ in the central region and n = 5 to 7 in outer regions ; the corresponding density and pressure are : $\rho \sim \frac{1}{t^3 v^{n+2}}$, $P \sim \frac{1}{t^{3\gamma} v^n}$.

In the following, we will often consider, for simplicity, the case of an homogeneous density distribution.

2) Shock wave induced by the pulsar radiation. Isothermal case.

Assuming a non-aligned pulsar model, that is, a model in which the rotation axis and the magnetic moments are not parallel, the pulsar will generate dipole waves at frequency Ω (the rotation frequency), and the radiated power will be (Ostriker and Gunn, 1969),

$$L = \frac{2\,\mu_\perp^2\,\Omega^4}{3c^3}$$

where $\mu_\perp$ is the component of magnetic moment orthogonal to the rotation axis.

The "luminosity" L(t) evolves according to :

$$L(t) = \frac{3\,c^3\,I^2}{8\mu_\perp^2 (t+t_A)^2},$$

where I is the moment of inertia.

The constant t_A is of order of several years for pulsars with luminosity around 10^{43} ergs/s, assuming reasonable values of the magnetic moment and of the moment of inertia (see Ruderman, 1972) ; in this paper, we are interested in the optical phase of the S.N. ($t \lesssim 3$ months), and we therefore assume a constant luminosity, $L(t) = L_i$.

Under the radiation pressure of these low-frequency waves, a cavity of radius R_1 is created (Pacini, 1968), and, when the S.N. has cooled enough, a shock wave starts to propagate. If the shock is isothermal, the shock wave radius is $R_s = R_1$.

Assuming complete reflection of the waves at the cavity radius, the radiation pressure P_{EM} evolves as :

$$\frac{d\,P_{EM}}{dt} = \frac{L_i}{4\pi\,R_1^3} - 4\,P_{EM}\,\frac{\dot{R}_1}{R_1} \tag{1.5}$$

or, after integration :

$$P_{EM}\,R_1^4 = \int \frac{L_i\,R_1}{4\pi}\,dt$$

Let M_1 be the mass swept up by the shock, and ρ_o the unperturbed density (the density just before the shock) ; conservation of momentum gives, for an homologously expanding envelope :

$$P_{EM} = \rho_1 \left(\dot{R}_1 - \frac{R_1}{t}\right)^2 + \frac{M_1}{4\pi\,R_1^2}\,\ddot{R}_1 \tag{1.6}$$

The result is, for a uniform density distribution :

$$\begin{cases} R_1 = \left(\dfrac{125}{99}\,L_i\,\dfrac{\dot{R}_o^3}{M_s}\right)^{1/5} t^{6/5} \\[2ex] P_{EM} = \dfrac{5}{11}\,\dfrac{L_i t}{4\pi\,R_1^3} \sim t^{-13/5} \end{cases} \tag{1.7}$$

where $\dot{R}_o$ is the (constant) expansion velocity of the outer edge of the supernova.

The energy balance is the following :

- Stored cavity radiation : $\frac{5}{11} L_i t$
- Additional kinetic energy : $\frac{35}{66} L_i t$
- Thermal energy dissipated by the shock : $\frac{1}{66} L_i t$

We see that there is very little energy transformed into heat ; furthermore, nearly one half of the radiated energy is stored in the cavity, making an enormous reservoir of energy. As the temperature goes below $T_L \sim 1.3 \cdot 10^4 K$, this energy will be released, thereby explaining the rapid rise of the light curve.

Numerically, we get, for $M_s = 5$ Mo, $\dot{R}_o = 5000$ km/s and $L_i = 10^{43}$ ergs/s :

$$\begin{cases} R_1 = 1.74 \cdot 10^9 \text{ km} \left(\frac{t}{10^6 s}\right)^{1.2} \\ P_{EM} = 6.9 \cdot 10^4 \text{ dynes/cm}^2 \cdot \left(\frac{t}{10^6 s}\right)^{-2.6} \end{cases}$$

3. Case of an adiabatic shock wave.

The calculations indicate that the shock becomes soon isothermal ; however, it is still interesting to investigate also the adiabatic case, and to compare with the results of paragraph 2.

There exists a self-similar solution when the density is a power law function of radius, in which case the thermodynamical variables can be expressed in separated form with respect to the time t and the reduced radius $\xi = r/R_s$. (Note that ξ is not the Lagrange variable, that we used in paragraph 1). The solution is given in Appendix A and the results are surprisingly similar to those for the isothermal case ; for an homogeneous density distribution, and $\gamma = 4/3$, we find :

$$R_s = 1.0128 \, R_1$$

The electromagnetic energy in cavity is still given by : $U_{EM} = \frac{5}{11} L_i t$, and the cavity radius R_1 is very nearly the radius given by eq. (1.7).

4. Expansion of cavity in later phases.

We will show in the next section that, at the beginning, the pulsar waves are totally reflected at $r = R_1$; the corresponding expansion law $R_1(t)$ of the cavity has already been calculated in paragraphs 2 and 3. However, the absorption coefficient increases with time, as the temperature decreases below $\sim 1.2 \cdot 10^4$ K (see Section II), and finally approaches unity. This time evolution depends on the heat transfer through the S.N., and will be discussed in detail in paper II ; the absorption coefficient reaches value unity at some time t_L near t_{max}, the optical peak of luminosity ($t_L \sim 50$ days).

Eq. (1.6) may be written :

$$P_{EM} = P_S + P_G$$

where $P_s = \rho_1 \left(\dot{R}_1 - \frac{R_1}{t}\right)^2$ is the ram pressure just behind the shock, and $P_G = \frac{M_1 \ddot{R}_1}{4\pi R_1^2}$ is an "inertial" pressure corresponding to the acceleration of the swept-up mass. When there is no absorption of the waves, we have found : $R_1 \sim t^{1.2}$, $P_s \sim 1/t^{2.6}$, $P_G = 2P_s$, $P_{EM} = 3P_s$. When absorption becomes strong ($t > t_L$), the radiation pressure P_{EM} is reduced by a factor $\frac{c}{\dot{R}_1} \sim 100$, and may be neglected ; the expansion of the cavity begins to decelerate, according to the equation :

$$P_s + P_G = P_{EM} = 0$$

This is a second order differential equation for the function $z(t) = \frac{R_1(t)}{t}$:

$$zz'' + 3\,z'^2 + \frac{2\,zz'}{t} = 0 \qquad (1.9)$$

but, from conservation of momentum, it may be reduced to a first order equation, which can be integrated analytically ; we find :

$$z = z^{(\infty)} \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{1/4} \qquad (1.10)$$

where the constants $z^{(\infty)}$ and τ are defined by the initial conditions $z_L(t_L)$, $z_L'(t_L)$:

$$\frac{\tau}{t_L} = \frac{1}{1 + \frac{z_L}{4\, t_L\, z_L'}} \quad \text{and} : \quad \frac{z^{(\infty)}}{z_L} = \left(1 + \frac{4\, t_L\, z_L'}{z_L}\right)^{1/4}$$

The swept-up mass tends to a limit $M_1^{(\infty)} = M_1(t_L)\left(\frac{z^{(\infty)}}{z_L}\right)^3$.

In view of the fact that absorption becomes efficient only near time t_L (see paper II), it is not a bad approximation to assume $R_1 \sim t^{1.2}$ up to time t_L ; in that case, we get :

$$\frac{\tau}{t_L} = \frac{4}{9} \; ; \quad \frac{z^{(\infty)}}{z_L} = \left(\frac{9}{5}\right)^{1/4} = 1.158 \; ; \quad \frac{M_1^{(\infty)}}{M_1(t_L)} = \left(\frac{9}{5}\right)^{3/4} = 1.554$$

and the shock pressure, P_s is :

$$P_s = P_s(t_L) \cdot \frac{1}{\theta^5 \left(\frac{9}{5} - \frac{4}{5\theta}\right)^{3/2}} \text{, with } \theta = t/t_L. \qquad (1.11)$$

The heat power released by the isothermal shock is :

$L_s = 2\pi R_1^2 \rho_o \left(\dot{R}_1 - \frac{R_1}{t}\right)^3$; when $t < t_L$, this is : $L_s = \frac{L_i}{66}$; when $t > t_L$, we find : $L_s = 2\pi t_L^3 \rho_o(t_L) t^2 z^2 z'^3 = \frac{L_i}{66} \frac{1}{\theta^4\left(\frac{9}{5} - \frac{4}{5\theta}\right)^{7/4}}$. This might contribute to the post maximum "plateau" of the light curve.

It is worth noticing that the maximum swept-up mass $M_1^{(\infty)}$ may be a rather small fraction of the total : with $W = 2.10^{51}$ ergs, $L_i = 6.10^{42}$ ergs/s and $t_L = 42$ days, we find :

$$\frac{M_s}{M_1^{(\infty)}} = \frac{1}{1.554} \cdot \left(\frac{66}{25} \cdot \frac{W}{L_i\, t_L}\right)^{3/5} = 17.4$$

5. Thickness and physical state of the shocked region.

a) Density at radius R_1 and relative thickness.

The particle density at radius R_1 is given by :

$$P_{EM} = n_1 \, k \, T_1$$

even if thermal radiation pressure were not negligible, since it is continuous at $r = R_1$.

In paper II, we will show that the temperature decreases in less than 10 days down to $\sim 2.10^4$K, and then stays a long time around $T_L \sim 1.3.10^4$K : the variations of n_1 are then nearly parallel to that of P_{EM} :

$$n_1 \simeq 3.4 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \left(\frac{t}{10^6 \text{s}} \right)^{-2.6}$$

To study the light curve, we need only consider times between roughly 10^6 s and $1.4 \cdot 10^7$ s, so that n_1 can vary between 3.10^{16} and 3.10^{13} cm.

The relative thickness $(R_s - R_1)/R_1$ or $\delta R_1/R_1$ of the shocked region is very small, due to isothermal compression :

$$\frac{\delta R_1}{R_1} = \frac{\rho_o}{3\rho_1} \sim \frac{1}{t^3 P_{EM}}$$

As long as absorption of the waves remains negligible $\delta R_1/R_1 \sim 1/t^{0.4}$ (see eq. (1.7)) : the shell becomes thinner and thinner ; with typical values of parameters : $M_s = 2.5$ M⊙, $T_1 = 1.2.10^4$ K, $\dot{R}_o = 10^4$ km/s, $L_i = 10^{43}$ ergs/s, the relative thickness $\delta R_1/R_1$ is $0.5.10^{-4}$ at time $t = 20$ days.

b) Ionization equilibrium.

It is defined by Saha's equation. At the temperature that we consider here ($1.4.10^4$K), helium stays neutral as long as the electronic density is higher than $N_e = 2.41.10^{13}$ cm^{-3}, for which density the degree of ionization is 50%.

Hydrogen is essentially ionized as long as $N_e < 5.1.10^{16}$ cm^{-3} (in which case the degree of ionization is also 50%).

During the time relevant for the light curve, the inner part of the envelope is then made of neutral helium and ionized hydrogen.

If there were no hydrogen, the electrons would be provided by metals like Mg, Si, Fe, C ... ; if all other abundances were unaltered the electron concentration would be lower by a factor 7.

II. THERMALIZATION OF THE STRONG WAVES RADIATED BY THE PULSAR.

In the first paragraph, we show that the density and degree of ionization are such that the envelope acts as a perfectly reflecting mirror ; on the contrary, the neutral sheet (δ) can be an efficient absorber, as the ions which are created there are accelerated by the mechanism described by Gunn and Ostriker (1969) and take away kinetic energy, soon transformed into heat.

However, an absorbing layer can be efficient only when its thickness δ is at least one wave length λ (here, $\lambda = r_o$, the light cylinder radius) ; but δ is only a function of temperature, and happens to be of order λ around $T = 1.3.10^4$K (paragraph 3). We are then led to the conclusion that the pulsar becomes a source of heat only when $T_1 \lesssim 1.4..10^4$K, where T_1 is the temperature at the cavity radius R_1 ; in other words, the pulsar is a "thermostat" and stabilizes temperature T_1 a few thousand degrees below the limit $1.4.10^4$K, as we shall see in paper II.

1) Reflection of the pulsar waves on the envelope.

We want to show here that the envelope, when it is ionized, acts as a perfect metallic mirror.

The electric field is then very small at radius R_1 and the magnetic field rather intense, which results in a high current density at the interface ; however the density of the envelope is so high that it can provide such a current without making the electron velocity too large ; the classical theory of metallic reflection can then be applied

a) Classical theory (low amplitude waves).

Let's recall the formula for the dielectric constant and conductivity of a plasma at frequency ω (Ginzburg, 1964) :

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\nu_{eff}^2+\omega^2} \\ 4\pi\sigma = \dfrac{\omega_p^2\ \nu_{eff}}{\nu_{eff}^2+\omega^2} \end{cases} \qquad (2.1)$$

where $\omega_p = \sqrt{\dfrac{4\pi N_e\ e^2}{m}}$ is the plasma frequency and ν_{eff} the effective collision frequency of electrons with electrons, atoms and ions :

$$\nu_{eff} = \nu_{eff}^i + \nu_{eff}^A + \nu_{eff}^e \qquad (2.2)$$

Ginsburg (1964) gives values of ν_{eff} as a function of temperature and density ; at $1.3.10^4$K and when the degree of ionization is not negligible, collisions with atoms can be neglected :

$$\nu_{eff} \simeq \nu_{eff}^i = \frac{5.5\ N_i}{T^{3/2}}\ \mathrm{Log}\left(\frac{220\ T}{N_+^{1/3}}\right) \qquad (2.3)$$

with T in °K and N in cm^{-3}.

Assuming $N_i \sim 2\ N_e$, we get :

$$\nu_{eff} \simeq 2.10^{-5}\ N_e$$

As ω is of order $10^3\ s^{-1}$, and $\omega_p^2 = 3.2.10^9\ N_e$, the following inequalities hold :

$$\omega \ll \nu_{eff} \ll \omega_p$$

In that case, the plasma acts like a metallic mirror, and the complex refractive index becomes :

$$n^2 = 1 - i\ \frac{\omega_p^2}{\omega\ \nu_{eff}} \qquad (2.4)$$

The absorption coefficient $A = \frac{4\ Re(n)}{|n+1|^2}$ is then very small :

$$A = \frac{2}{\omega_p}\sqrt{2\ \omega\ \nu_{eff}}$$

$$= 10^{-5} \text{ for } \omega = 2000\ s^{-1} \text{ and } T = 1.3.10^4 K. \qquad (2.5)$$

A wave with that frequency can then be reflected 10^5 times without being absorbed.

Furthermore, the penetration length of the wave into the plasma is :

$$\frac{\lambda}{Im\ n} = \frac{A}{2}\ \lambda = 75 \text{ cm.}$$

b) Realistic case (strong waves).

The preceding calculation is valid only for "low amplitude" waves ; in particular, the Larmor frequency $\omega_L = \frac{eB}{m}$ must be lower than, either the collision frequency ν_{eff}, either the wave frequency ω, otherwise the approximation of linear trajectories is not valid.

For the case of a pulsar, and during the optical phase of the SN ($t \lesssim 10^7$s), the inequality $\omega_L \gg \omega$ holds : this is the definition of what we call "strong" waves. In that case, a free electron in a vacuum would become relativistic ; for a low density plasma, with cut-off frequency below ω, Akhiezer and Polovin (1956) have shown that the electrons are still relativistic : only circularly polarized waves can propagate and the electrons move in circular orbits with velocity parallel to the magnetic field, and the centrifugal force is balanced by the electric field :

$eE = m\gamma\beta\omega$, where γ is the Lorentz factor and $\beta = V_e/c$

The cut-off frequency is then $\omega_p/\sqrt{\gamma}$, which may be considerably lower than ω_p when the waves are very strong.

However, due to the very high density, we show (in appendix E that the waves cannot propagate, the motion of electrons is non relativistic, rectilinear and in fact the results of the preceding paragrap still apply. The electronic velocity is generally less than 10^{-6} c, i.e lower than the ion thermal velocity.

2) Bounds on the absorption coefficient of a layer of thickness δ.

From an optical standpoint the system is equivalent to an absorbing layer of thickness δ sticked on a perfectly reflecting mirror (see fig. 3). Assuming a constant (complex) refractive index, $n = a - ib$ for this layer we find the amplitude for reflection (Appendix B) :

$$R = e^{2ik\delta} \cdot \frac{n\cos(kn\delta) - i\sin(kn\delta)}{n\cos(kn\delta) + i\sin(kn\delta)}$$, where $k = \frac{1}{\lambda}$ is the wavenumber

(2.6)

The absorption coefficient is : $\alpha = 1 - |R|^2$.

When $k\delta$ and $|kn\delta| \ll 1$, we get the approximate value :

$$R = 1 - \frac{2i}{3}(n^2-1)(k\delta)^3 \quad \text{and} \quad : \alpha = \frac{8}{3} a\, b (k\delta)^3 \ ;$$

we see that the reflection is nearly perfect when $k\delta \ll 1$, even when the absorption constant b is large. To make this remark more accurate, we determined the maximum value of α when n vary in the complex plane (Re $n > 0$, Im $n < 0$) ; we find :

$$\alpha \leq \alpha_1(k\delta) = \frac{0.8538\ k\delta}{1 + 0.4269\ k\delta + 0.05738\ (k\delta)^2} \quad \text{for } k\delta < 4.852 \qquad (2.7)$$

This maximum value α_1 is reached for an index n such that $2kn\delta = 7.498 + 2.769\ i$; which is the first complex root of the equation $\sin z = z$ (see appendix B).

In our case, the electromagnetic wave is trapped in the central cavity as long as $k\delta \ll 1$, the number of reflections that it undergoes before it losses its energy adiabatically is of order : $n_R = c/\dot{R}_1 \sim 100$ with our choice of parameters. We can then define an "effective" absorption coefficient : $\alpha_{eff} = c/\dot{R}_1\ \alpha$. From eq. (2.7) and assuming $\alpha = \alpha_1$, α_{eff} is of order 1 when $k\delta \simeq \dot{R}_1/c$, or : $\delta \sim 1$ km.

3) Calculation of $\delta(T)$ and the characteristic temperature T_L

Let us recall the definition of $\delta(T)$:

$$\delta(T) = v_{Th} \cdot \theta_i \qquad (2.8)$$

where θ_i is the time for ionization by a black-body radiation at temperature T for Helium atoms, which have the highest ionization potential ; v_{TH} is the average thermal velocity in the radial direction :

$$v_{Th} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi\ m_{He}}} \qquad (2.9)$$

We consider only ionization from the ground state, since the lifetime of excited levels is much smaller than θ_i.

For the case of Helium, the photo-ionization cross-section is (Allen, 1973)

$$\sigma(\nu) = \sigma_o \left(\frac{\nu_o}{\nu}\right)^2$$

with :

$$\sigma_o = 7.6.10^{-18} \text{ cm}^2$$
$$h\nu_o = I = 24.59 \text{ eV.}$$

The photon flux is : c dn, where dn is the photon density :

$$dn = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Consequently the ionization rate for an atom is :

$$\frac{1}{\theta_i} = \sigma c \, dn = \frac{8\pi}{c^2} \sigma_o \nu_o^2 \frac{kT}{h} \int_{x_o}^{+\infty} \frac{dx}{e^x - 1} \quad , \quad \text{with : } x_o = \frac{h\nu_o}{kT} \; ;$$

or after integration : $\theta_i = \frac{c^2}{8\pi\sigma_o \nu_o^2} \cdot \frac{h}{kT \, \text{Log}\left(\frac{e^{x_o}}{e^{x_o} - 1}\right)}$, which is practically the same than :

$$\theta_i = \frac{c^2}{8\pi\sigma_o \nu_o^3} x_o \, e^{x_o} \qquad (2.10)$$

since e^{x_o} is very large.

Numerically, we find : $\delta(T) = 0.434.10^{-9}$ km. $\sqrt{x_o}.e^{x_o}$.

The function $\delta(T)$ is plotted in fig. (4) ; it is a very rapidly varying function and it reaches the critical value $\delta \sim 1$ km for a temperature about $1.4.10^4$K.

Hence the conclusion that the pulsar will act as a thermostat keeping

temperature near $1.4.10^4$K, since small departures from this temperature would change considerably δ and the absorption coefficient α.

As a first approximation, we can use the maximum value α_1 for the absorption coefficient : the corresponding error should be small, since a large error in α results in only a small difference in temperature (less than 10^3K). A realistic calculation of α would involve two steps : first, the calculation of the kinetic energy of the accelerated ions, and second the solution of the diffusion problem of Helium atoms towards the cavity. It can be seen easily that the stationary wave which exists in the neutral sheet δ accelerates ions to energies of order $mc^2(\vec{E}/\vec{B})^2 \sim mc^2(k\delta)^2$, at least when $k\delta \lesssim 1$.
This formula for the energy also shows that the local electromagnetic energy loss is roughly proportional to $\vec{E}^2$, which allows the definition of an "effective conductivity" σ through the formula :

$$\frac{dw}{dx\ dy\ dz\ dt} = \sigma \vec{E}^2$$

and this would justify the description of energy absorption by means of a complex refractive index.

CONCLUSION :

We have studied in this paper the dynamical state of a supernova envelope and the effect of a central pulsar.

We have shown that the main dynamical effect of a pulsar on a surrounding SN envelope during the early phase of expansion, is to create a central cavity filled with low-frequency pulsar radiation (Pacini, 1968), and to produce a shock wave which propagates outward through the SN ejecta, as soon as they become cool enough ($t \gtrsim 1$ day). The shock front stays very near the cavity radius, and consequently the shocked region concentrates in a highly compressed shell ($R_1 < r < R_s$) all the material swept-up out of the cavity.

Analytic formulas for the expansion law of the cavity can be found when the density distribution of the SN ejecta is a power law function of radius, and we give them for the case of a uniform density. We have calculated a self-similar solution for an isothermal and for an adiabatic shock, and we find that the expansion of cavity is nearly the same in both cases ; a rough estimate shows that the shock should become isothermal rather soon.

Next, we used this model as a framework in which to study the absorption (or thermalization) of the pulsar waves, and we found that the ordinary absorption process (Joule's dissipation) is quite inefficient and can be neglected here, due to the high conductivity of the material. This question is obviously very important for SN light curves models in which the pulsar is the heating source.

We have proposed as the main absorption process particle acceleration by the pulsar waves ; the injection into the acceleration region involves the first ionization potential of the accelerated ion. We have seen that this absorption is strongly temperature dependent, and that it becomes efficient when the cavity temperature falls below

$1.4.10^4$K, if the highest ionization potential is that of Helium.

In the accompanying paper (paper II), we have calculated the SN light curves under these assumptions, and we found a good fit of the typical SN II light curve (published by Shklovsky, 1968) ; this fit involves quite conventional values of the parameters (total mass, expansion velocity, peak luminosity, etc ...) ; furthermore the colour temperature evolution calculated in paper II is very similar to the observed one.

APPENDIX A : Self similar solution for the shock wave induced by the pulsar strong waves of the cavity.

Assuming a zero temperature supernova envelope, the electromagnetic radiation pressure in the central cavity creates a shock at radius R_s which propagates outward in the envelope. In case that the unperturbed density distribution $\rho_o(r)$ (i.e. the density before the shock) is a power law function of radius, there is a self-similar solution to the complete set of hydrodynamic equations ; all other solutions tend asymptotically to it, when $t \to \infty$. The solution is self-similar in that its shape does not change, only the scale changes versus time (Sedov, 1959 ; Zeldovich and Raizer, 1967). Mathematically, the thermodynamical quantities are expressed in separable form versus time (t) and the reduced radius $\xi = r/R_s$

$$\begin{cases} \rho = \rho_o(t)\ g(\xi) \\ P = \rho_o\ \dot{R}_s^2\ \pi(\xi) \\ u = \dot{R}_s\ v(\xi) \end{cases} \qquad (A.1)$$

The velocity distribution is $u(r,t) = r/t$, for a cool envelope expanding from a very compact initial state ; $v(\xi)$ is therefore proportional to ξ for $\xi > 1$ (before the shock). In the following, we will assume an homogeneous unperturbed density, and $\rho_o(t)$ is then proportional to t^{-3}. Assuming adiabaticity of the shock, the set of hydrodynamical equations to be solved is :

$$\begin{cases} \dfrac{d\ \mathrm{Log}\,\rho}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{2u}{r} = 0 & \text{Mass conservation} \\ \dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial r} = 0 & \text{Euler equation} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\mathrm{Log}\,\dfrac{P}{\rho^{\gamma}}\right) = 0 & \text{Constant Entropy} \end{cases} \qquad (A.2)$$

For the self-similar case, $R_s(t)$ is a power law function of t : $R_s \sim t^{\alpha}$, as can be checked easily from energy conservation :

. Radiated energy :

$$\int_o^t L_i\, dt = L_i t$$

. Thermal energy in the envelope :

$$U = \frac{1}{(\gamma-1)} \int_{R_1}^{R_s} P\, d_3\vec{r}$$

$$= \frac{4\pi}{(\gamma-1)}\, \rho_o\, \dot{R}_s^2\, R_s^3 \int_{\xi_1=R_1/R_s}^{1} \pi(\xi)\xi^2 d\xi$$

This gives the condition : $\rho_o \dot{R}_s^2 R_s^3 \sim t$ or : $R_s \sim t^{1.2}$; we already knew that the cavity radius R_1 is proportional to $t^{1.2}$, and due to similarity R_s must have same functional form.

Substituting in eq. (A.2) the reduced functions $g(\xi)$, $\pi(\xi)$ and $v(\xi)$, we get :

$$\begin{cases} (v-\xi)(\mathrm{Log}\ g)' + v'(\xi) + \dfrac{2v}{\xi} - \dfrac{5}{2} = 0 \\ \dfrac{v}{\sigma} + (v-\xi)\, v' + \dfrac{\pi'}{g} = 0 \\ (v-\xi)\left(\mathrm{Log}\,\dfrac{\pi}{g^{\gamma}}\right)' + \mu = 0 \end{cases} \qquad (A.3)$$

with : $\mu = \dfrac{2(\alpha-1) + 3(\gamma-1)}{\alpha}$.

Following Gandelman et al. (1956), we introduce the new functions $\varphi = \frac{v}{\xi}$ and $C^2 = \frac{\gamma}{\xi^2}\frac{\pi(\xi)}{g(\xi)}$; the system (A.3) may then be written

$$\begin{cases} a) \quad \frac{d\varphi}{d\mathrm{Log}\,\xi} + (\varphi-1)\frac{d\mathrm{Log}\,g}{d\mathrm{Log}\,\xi} = \frac{3}{\alpha} - 3\varphi \\ b) \quad (\varphi-1)\frac{d\varphi}{d\mathrm{Log}\,\xi} + \frac{C^2}{\gamma}\frac{d\mathrm{Log}\,g}{d\mathrm{Log}\,\xi} + \frac{1}{\gamma}\frac{d\,C^2}{d\mathrm{Log}\,\xi} = -\frac{2}{\gamma}C^2 - \varphi(\varphi-\frac{1}{\alpha}) \\ c) \quad (\gamma-1)\,C^2\frac{d\mathrm{Log}\,g}{d\mathrm{Log}\,\xi} - \frac{d\,C^2}{d\mathrm{Log}\,\xi} = C^2(2+\frac{\mu}{\varphi-1}) \end{cases} \qquad (A.4)$$

This is a linear system of equations for $\frac{d\varphi}{d\mathrm{Log}\,\xi}$, $\frac{d\mathrm{Log}\,g}{d\mathrm{Log}\,\xi}$ and $\frac{d\,C^2}{d\mathrm{Log}\,\xi}$; it gives $\frac{d\varphi}{d\mathrm{Log}\,\xi}$ and $\frac{d\,C^2}{d\mathrm{Log}\,\xi}$ versus φ and C^2 ; we then get a first order differential equation, of the type :

$$\frac{d\,C^2}{d\varphi} = F(\varphi, C^2)$$

Adiabatic integral

Having determined $\varphi(\xi)$ and $C^2(\xi)$, it is not necessary to do a further integration to get $g(\xi)$: there is indeed a first integral, called adiabatic integral, connecting g, φ, C^2 and ξ, as a result of conservation of entropy ; we may write eq. (A.4-a) and (A.4-c) as :

$$\begin{cases} d\,\mathrm{Log}(\varphi-1) + d\,\mathrm{Log}\,g = -3\,d\,\mathrm{Log}\,\xi + 3\,(\frac{1}{\alpha}-1)\frac{d\,\mathrm{Log}\,\xi}{(\varphi-1)} \\ (\gamma-1)d\,\mathrm{Log}\,g - d\,\mathrm{Log}\,C^2 = 2\,d\,\mathrm{Log}\,\xi + \frac{\mu\,d\,\mathrm{Log}\,\xi}{(\varphi-1)} \end{cases}$$

After eliminating $\frac{d\,\mathrm{Log}\,\xi}{\varphi-1}$, we get :

$$d\left\{\mu\,\mathrm{Log}(\varphi-1) + \left[\mu+3(\gamma-1)(1-\tfrac{1}{\alpha})\right]\mathrm{Log}\,g - 3(1-\tfrac{1}{\alpha})\mathrm{Log}\,C^2 + 3\left[\mu-2(1-\tfrac{1}{\alpha})\right]\mathrm{Log}\,\xi\right\} = 0$$

which can be expressed as :

$$(\varphi-1)^{a_1}\,g^{a_2}\,C^{2a_3}\,\xi^{a_4} = \text{constant} \qquad (A.5)$$

with :

$$\begin{cases} \alpha\, a_1 = 2(\alpha-1) + 3(\gamma-1) \\ \alpha\, a_2 = 3(\gamma-1) + (\alpha-1)(3\gamma-1) \\ \alpha\, a_3 = -3(\alpha-1) \\ \alpha\, a_4 = 9(\gamma-1) \end{cases}$$

Assuming $\gamma = 4/3$, eq. (A.5) may be written :

$$\xi^{15}(\varphi-1)^7\, g^8/c^6 = \text{constant}$$

Boundary conditions.

- For $\xi > 1$, the material has not yet been perturbed by the shock :

$$\pi(\xi) = 0, \quad g(\xi) = 1, \quad v(\xi) = \frac{\xi}{\alpha}.$$

- Just behind the shock ($\xi = 1^-$), the discontinuity conditions across the shock give :

$$\begin{cases} \pi(1^-) = \dfrac{2}{(\gamma+1)} \cdot \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2} \\ g(1^-) = \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1} \\ v(1^-) = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{(2\alpha+\gamma-1)}{(\gamma+1)} \\ c^2(1^-) = \dfrac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \cdot \dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2} \end{cases} \qquad (A.6)$$

For $\gamma = 4/3$, this is : $\pi(1^-) = \frac{1}{42}$, $g(1^-) = 7$,

$$v(1^-) = \frac{41}{42} \ , \quad c^2(1^-) = \frac{2}{441} \ .$$

- The cavity radius $R_1 = \xi_1 R_s$ is determined by the condition :

$$\dot{R}_1 = u(R_1) \ , \text{ or : } v(\xi_1) = \xi_1 .$$

The cavity is filled with electromagnetic pulsar waves at constant pressure $\pi(\xi_1)$, and its adiabatic index is 4/3.

From energy conservation, we find the exact value of $R_s(t)$:

$$R_s = \left(\frac{125}{99} \cdot \frac{L_i}{A} \cdot \frac{\xi_1^2}{12\pi_1}\right)^{1/5} \cdot t^{6/5}, \text{ with : } A = \frac{4\pi}{3} \rho_o t^3 = \text{constant} \quad (A.7)$$

to be compared with eq. (1.7) of section I which gives the shock radius for an isothermal shock (in that case, $R_1 = R_s$).

We have integrated numerically eq. (A.5) for $\gamma = 4/3$, and we find :

$$\xi_1 = 0.9874, \ \pi_1 = 0.084 \simeq \frac{1}{12} .$$

The factor $\frac{\xi_1^2}{12\pi_1}$ in eq. (A.7) is then very near unity, and there is very little difference for the shock radius R_s between the adiabatic and the isothermal cases.

The electromagnetic pressure in cavity is still given by eq. (1.7) of section I :

$$P_{EM} = \rho_o \dot{R}_s^2 \pi_1 = \frac{5}{11} \cdot \frac{L_i t}{4\pi R_1^3} \qquad (A.8)$$

and the electromagnetic energy in cavity is :

$$U_{EM} = \frac{5}{11} L_i t \qquad (A.9)$$

The thermal energy in the envelope is, as we have already seen :

$$U = \frac{4\pi}{(\gamma-1)} \rho_o \dot{R}_s^2 R_s^3 \int_{\xi_1}^{1} \pi(\xi) \xi^2 \, d\xi , \quad \text{or from eq. (A.}$$

$$U = \frac{5}{11} \cdot \frac{L_i t}{(\gamma-1)} \cdot \frac{\xi_1^2}{\pi_1} \int_{\xi_1}^{1} \pi(\xi) \xi^2 \, d\xi . \qquad (A.10)$$

APPENDIX B

1) Reflection of the pulsar strong waves on the envelope.

We have shown in section (II.1-a) that the SN envelope acts as a perfect mirror at least for low amplitude waves, since its absorption coefficient is of order 10^{-5}.

We show here that, even in the real case, the ordinary linear theory is still valid as the motion of electrons is rectilinear, non relativistic and is, in fact, of very low velocity ($v_e \sim 10^{-6} c$). We have to make the proof only for $t < t_L$ since afterwards the waves are totally absorbed by the neutral sheet δ, as shown in section (II, 2, 3). However, a determination of t_L (and of t_{max}, the time of peak luminosity) can only be achieved by a study of the heat diffusion through the supernova, which is the subject of paper II. We therefore had to use in this appendix the formulas giving t_L, which are derived in paper II.

We show in paper II that

$$t_L = X \, \tau_c$$

$$\tau_c = 4.82 \cdot 10^6 \text{ s} \cdot \frac{M_s^{2/7} \, L_i^{4/21}}{\dot{R}_o^{6/7} \, T_L^{20/21}}$$

in "units" of : $M_s = 2.5$ Mo, $L_i = 10^{43}$ ergs/s, $\dot{R}_o = 10^4$ km/s and $T_L = 1.2 \cdot 10^4$ K, which may also be considered as typical values of the problem. The constant $X = t_L/\tau_c$ is defined in paper II and is very near unity, so that $t_L \simeq \tau_c$; from the above formulas, we see that t_L is of order of 50 days. The average cavity temperature T_L is always between 1.1 and 1.3 . 10^4 K, as shown in paper II.

As seen in paragraph (II.1-a), the effective collision frequency is :

$$\nu_{eff} = 2 \cdot 10^{-5} N_e \qquad (B.1)$$

for $T \simeq 1.3 \cdot 10^4 K$.

The Larmor frequency ω_L at the cavity radius R_1 is related to that (ω_{Lo}) at light cylinder radius r_o by :

$$\omega_L = \frac{r_o}{R_1} \omega_{Lo}$$

and $\omega_{Lo} \simeq 3 \cdot 10^6 \omega^3$ for an average pulsar. This gives :

$$\omega_L = \frac{3.6 \cdot 10^{18} \ s^{-1}}{R_1(km)} \cdot \left(\frac{\omega}{2.10^3} \right)^2 \qquad (B.2)$$

We may express ν_{eff} in terms of the electromagnetic pressure P_{EM} (eq. (1.7)), using the relations

$$\begin{cases} P_{EM} = n_1 \ k \ T_1 \\ N_e = \dfrac{n_1}{2} \end{cases}$$

We get :

$$\nu_{eff} = 0.55 \cdot 10^7 P_{EM} \ (C.G.S.) \qquad (B.3)$$

The ratio ν_{eff}/ω_L is proportional to $P_{EM} R_1$, and therefore to $t^{-1.4}$; at time τ_c it takes the value :

$$\left. \frac{\nu_{eff}}{\omega_L} \right|_{\tau_c} = 7.0 \cdot \left(\frac{2.10^3}{\omega} \right)^2 \left(\frac{L_i}{10^{43}} \right)^{1/3} \left(\frac{T_L}{1.2.10^4} \right)^{4/3} \qquad (B.4)$$

From an analysis of the data on the known pulsars, one can get the approximate relation :

$$L_i \sim 10^{41} \ ergs/s \cdot \left(\frac{\omega}{10^3 s^{-1}} \right)^4$$

and eq. (B.4) may be written as :

$$\frac{\nu_{eff}}{\omega_L} \simeq 3. \left(\frac{10^{43}}{L_i}\right)^{1/6} \cdot \left(\frac{T_L}{1.2.10^4}\right)^{4/3} \cdot \left(\frac{\tau_c}{t}\right)^{7/5} \qquad (B.5)$$

We know that T_L is always between 1.1 and 1.3 . 10^4K ; the factor $L_i^{1/6}$ is also nearly a constant, and $\left(\frac{\tau_c}{t}\right)^{7/5}$ is a least 1., and may be much larger : we conclude that the ratio $\frac{\nu_{eff}}{\omega_L}$ is always larger than 1 at time τ_c or t_L, and in earlier phases it would be even much larger.

The electron trajectories are therefore nearly rectilinear.

We have next to evaluate the electron velocity ; the current is :

$$j = N\, e\, v = \sigma E = \frac{\sigma B}{|n|}$$

from which we get the velocity :

$$v = \frac{\sigma B}{N\, e\, |n|} \qquad (B.6)$$

The magnetic field is : $B = m\omega_L/e$, and $\sigma = \omega_p^2/4\pi\nu_{eff}$, $|n| = \omega_p/\sqrt{\omega\,\nu_{eff}}$ (see paragraph II,1-a), and we may write eq. (B.6) as :

$$\frac{v}{c} = \frac{\omega_L}{\omega_p}\sqrt{\frac{\omega}{\nu_{eff}}}$$

Using the values of ω_p, ω_L (eq. B.2), ν_{eff} (eq. B.1) and the formulas for R_1 and n_1 given in section (I.5), we find :

$$\frac{v}{c} = \frac{17.}{(n_1)^{7/13}} \cdot \left(\frac{\omega}{2.10^3}\right)^{2.5}$$

Even for $\omega = 2.10^3\ s^{-1}$ and $n_1 = 3.10^{13}\ cm^{-1}$, $\frac{v}{c}$ is less than 10^{-6} : the electron velocity associated with the electric current is always very low.

We therefore conclude that the linear theory is still applicable to the real case of the pulsar strong waves.

2) Reflection coefficient of the pulsar waves on the envelope, taking account of the absorbing layer δ.

The geometry of the system (absorbing layer + perfect "metallic" mirror) is shown in fig. 3. We choose the $\hat{y}$ axis along the electri field, assuming an incoming plane polarized wave.

In the neutral Helium sheet ($0 < x < \delta$), with complex refractive index n, the electromagnetic field is a standing wave :

$$\begin{cases} \vec{E} = i\, E_o\, \hat{y}\, e^{i\omega t}\, \sin(knx) \\ \vec{B} = -\, n\, E_o\, \hat{z}\, e^{i\omega t}\, \cos(knx) \end{cases} \qquad (B.7)$$

where $k = \omega$ is the wave number in the vacuum (we do not keep track here of factors c).

In the cavity ($x > \delta$), the wave is the sum of the incoming and the reflected waves with reflection amplitude R :

$$\begin{cases} \vec{E} = \left| e^{i(\omega t+kx)} - R\, e^{i(\omega t-kx)} \right| .\ \hat{y} \\ \vec{B} = \left| e^{i(\omega t+kx)} + R\, e^{i(\omega t-kx)} \right| .\ (-\hat{z}) \end{cases}$$

From the Maxwell equations :

$$\overrightarrow{\text{curl}E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{curl}B} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

the fields $\vec{E}$ and $\vec{B}$ must be continuous at $x = \delta$.

From this condition, we find the reflection amplitude R :

$$R = e^{2ik\delta}\ \frac{n\cos(kn\delta) - i\sin(kn\delta)}{n\cos(kn\delta) + i\sin(kn\delta)} \qquad (B.9)$$

The absorption coefficient is :

$$A = 1 - |R|^2$$

Maximum value of the absorption coefficient A.

For a given value of δ (or more precisely, of $k\delta$), A cannot be arbitrarily close to unity, even when the index n is taken as a free parameter. We give here the maximum value $A_1(k\delta)$ of A, when n can take any value in the complex plane (Re $n > 0$, Im $n < 0$).

We can write eq. (B.9) as :

$$\begin{cases} R = e^{2i(k\delta - \varphi)} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\operatorname{tg}(kn\delta)}{n} \end{cases} \qquad (B.10)$$

The extremum of $|R|^2$ is an extremum of Im φ, and therefore an extremum of φ.

The extrema are then given by :

$$\frac{d\varphi}{dn} \equiv \frac{kn\delta(1+\operatorname{tg}^2 kn\delta) - \operatorname{tg} kn\delta}{n^2 + \operatorname{tg}^2 kn\delta} = 0 \quad , \quad \text{or : } kn\delta = \frac{\operatorname{tg} kn\delta}{1+\operatorname{tg}^2 kn\delta}$$

The last equation may be written as :

$$\begin{cases} \sin z = z \\ z = 2kn\delta \end{cases} \qquad (B.11)$$

Let z_n be a complex root of the equation sin z = z ; the corresponding extremum value of the absorption coefficient is easily found to be

$$A_n = \frac{4\beta_n k\delta}{(1+\beta_n k\delta)^2 + (\alpha_n k\delta)^2} \qquad (B.12)$$

where we define coefficients α_n and β_n as :

$$\alpha_n - i\,\beta_n = \frac{\operatorname{tg}(z_n/2)}{(z_n/2)} \qquad (B.13)$$

It can be seen that the highest A_n is A_1, when $k\delta$ is small enough (more precisely, when $k\delta < 4.852$, otherwise A_2 becomes higher, and then A_3 and so on). The absolute maximum of A is therefore :

$$A_1(k\delta) = \frac{4\beta_1 k\delta}{(1+\beta_1 k\delta)^2 + (\alpha_1 k\delta)^2} \qquad (B.14)$$

Numerically, we get :

$$A_1(k\delta) = \frac{0.8538\ k\delta}{1 + 0.4269 k\delta + 0.05738\ (k\delta)^2}$$

$A_1\ (k\delta)$ reaches its maximum value of 0.9424 for $k\delta = 4.174$.

FIGURE CAPTIONS

Fig. 1 Schematic picture of a SN : R_o is the envelope radius, R_1 the cavity radius, R_s the shock radius ; δ is the thickness of the atomic Helium sheet. The thickness $R_s - R_1$ has been increased many times to become visible on the picture, and the thickness δ even more.

Fig. 2 Velocity distribution, $v(r)$. Beyond the shock front R_s the velocity is proportional to the radius, as the ejecta are homologously expanding. The velocity discontinuity across the shock is very nearly 1/5 of the velocity before the shock. The separation between R_1 and R_s has been increased to make this figure clearer.

Fig. 3 Optical equivalent (absorbing layer + mirror) of the process of absorption of the strong waves energy near the cavity radius R_1. The pulsar is on the right ($X = +\infty$), and the ejected material on the left ($X < 0$).

Fig. 4 Function $\delta(T)$ as calculated from eq. (2.8), (2.9) and (2.10). That function δ is the average "free path" of a Helium atom before it gets ionized by the ambiant black-body radiation at temperature T. For $T = T_1$, the cavity temperature, δ is the thickness of the neutral Helium sheet.

Fig. 5 Maximum absorption coefficient versus temperature, $\alpha_1(T)$ (or $A_1(T)$), as calculated in Appendix B (eq. B.14) ; we show the curves corresponding to the pulsar angular velocities $\Omega = 2000\ s^{-1}$ and $500\ s^{-1}$.

REFERENCES

Akhiezer, A.I. and Polovin, R.V., 1956, Soviet Phys. J.E.T.P., 3, 696.

Allen, C.W., 1973, Astrophysical Quantities, University of London, The Athlone Press.

Arnett, W.D., 1969, in Supernovae and their remnants, ed. P. Brancazio, A.G.W. Cameron, New York, Gordon and Breach.

Arnett, W.D. and Schramm, D.N., 1973, Ap. J. Letters 184, L47.

Bodenheimer, P. and Ostriker, J.P., 1974, Astrophys. J. 191, 465.

Colgate, S.A. and McKee, C., 1969, Astrophys. J. 157, 625.

Colgate, S.A. and White, R.H., 1966, Astrophys. J. 143, 626.

Colgate, S.A., 1971, Ap. J. 163, 221.

Falk, S.W. and Arnett, W.D., 1973, Astrophys. J. 180, L65.

Gandelman, G.M. and Frank-Kamenetskii, D.A., 1956, Soviet Phys. Doklady, 1, 223.

Ginzburg, V.L., 1964, The propagation of electromagnetic waves in plasmas, Pergamon Press, Oxford.

Gordon, C., 1973, Astron. and Astrophys., 29, 123.

Grasberg, E.K., Imshennik, V.S. and Nadyozhin, D.K., 1971, Astrophys. Space Sci., 10, 28.

Grasberg, E.K. and Nadezhin, D.K., 1970, Sov. Astron. AJ, 13, 585.

Gull, S.F., 1973, Mon. Not. Astro. Soc., 161, 47.

Gunn, J.E. and Ostriker, J.P., 1969, Phys. Rev. Letters, 22, 728.

Gunn, J.E. and Ostriker, J.P., 1970, Ap. J. 160, 979.

Gunn, J.E. and Ostriker, J.P., 1971, Ap. J. 165, 523.

Kirshner, R.P., Oke, J.B., Penston, M.V. and Searle, L., 1973, Ap. J. 185, 303.

Kirshner, R.P., Willner, S.P., Becklin, E.E., Neugebauer, G. and Oke, J.B., 1973, Ap. J. 180, L97.

Kulsrud, R.M., Ostriker, J.P. and Gunn, J.E., 1972, Phys. Rev. Letters 28, 636.

Ostriker, J.P. and Gunn, J.E., 1969, Ap. J. 157, 1395.

Ostriker, J.P. and Gunn, J.E., 1971, Ap. J. 164, L95.

Pacini, F., 1968, Nature 219, 145.

Paczynski, B., 1970, Acta Astr. 20, 47.

Ruderman, M., 1972, Ann. Rev. of Astrophys., p. 427.

Salvati, M., 1974, Production of fast particles by pulsars, Study group on cosmic rays and related astrophysical problems, Frascati, Italy.

Sedov, L.I., 1959, Similitary and dimensional methods in Mechanics, New York Academic Press.

Shklovsky, L.S., 1968, Supernovae, ed. Wiley Interscience, London.

Zeldovich, Ya. B. and Raizer, Yu, P., 1967, Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena, (New York, Academic Press).

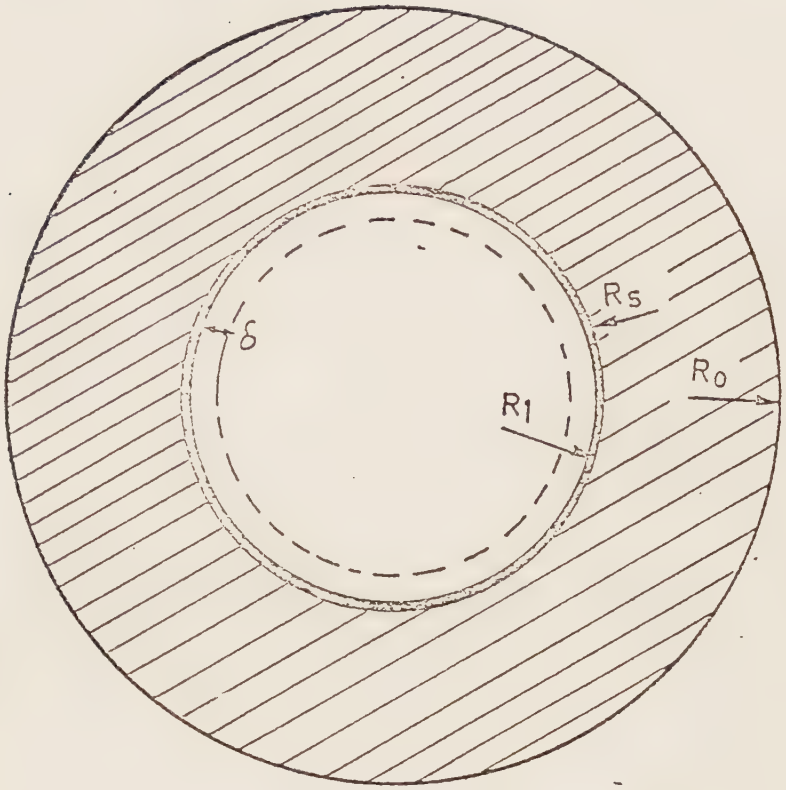


Fig 1

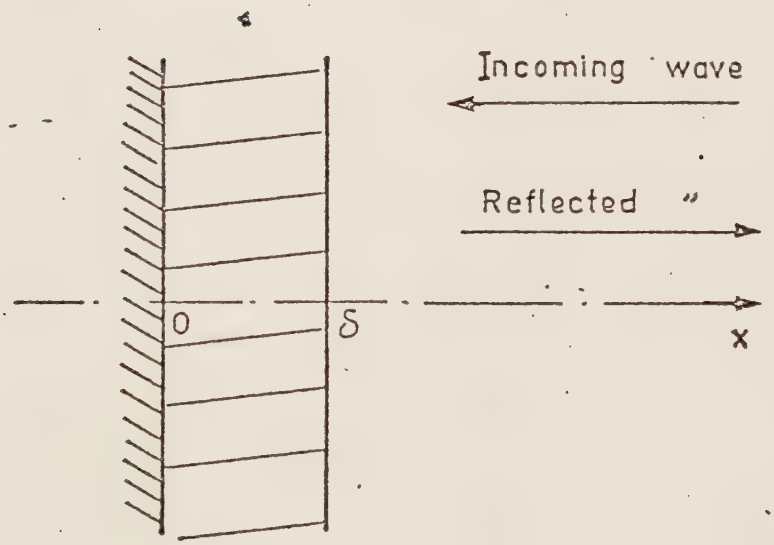


Fig 3

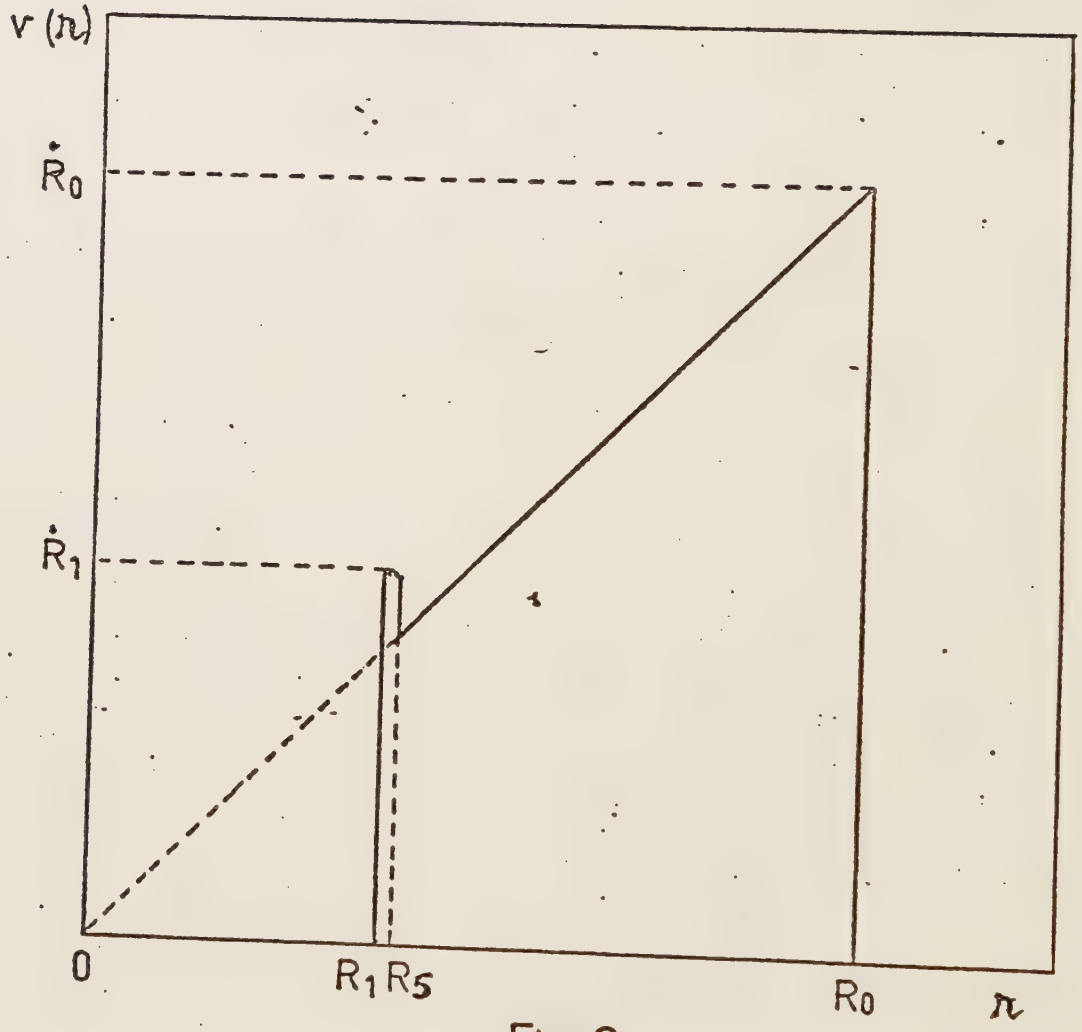


Fig-2

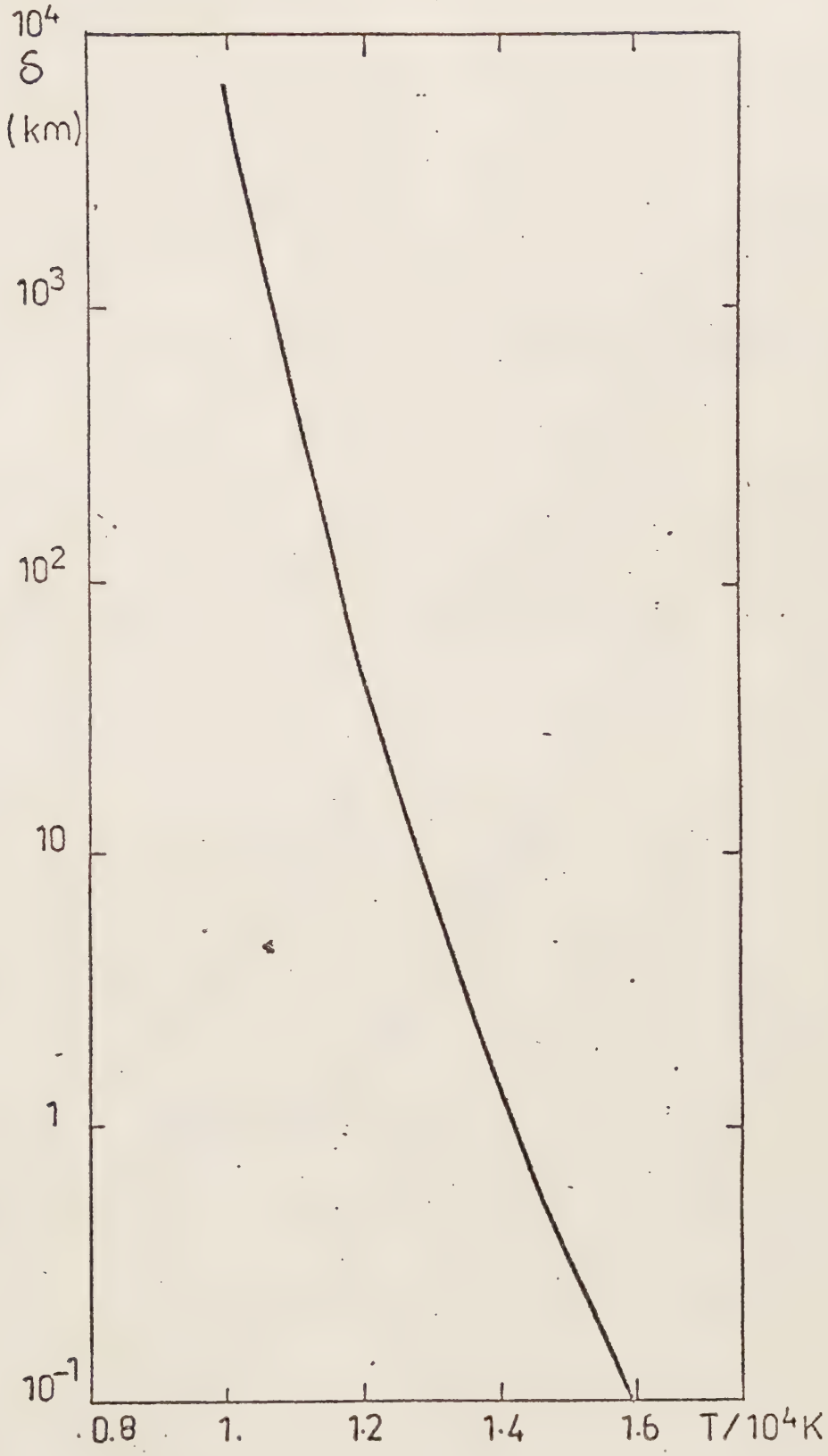


Fig – 4

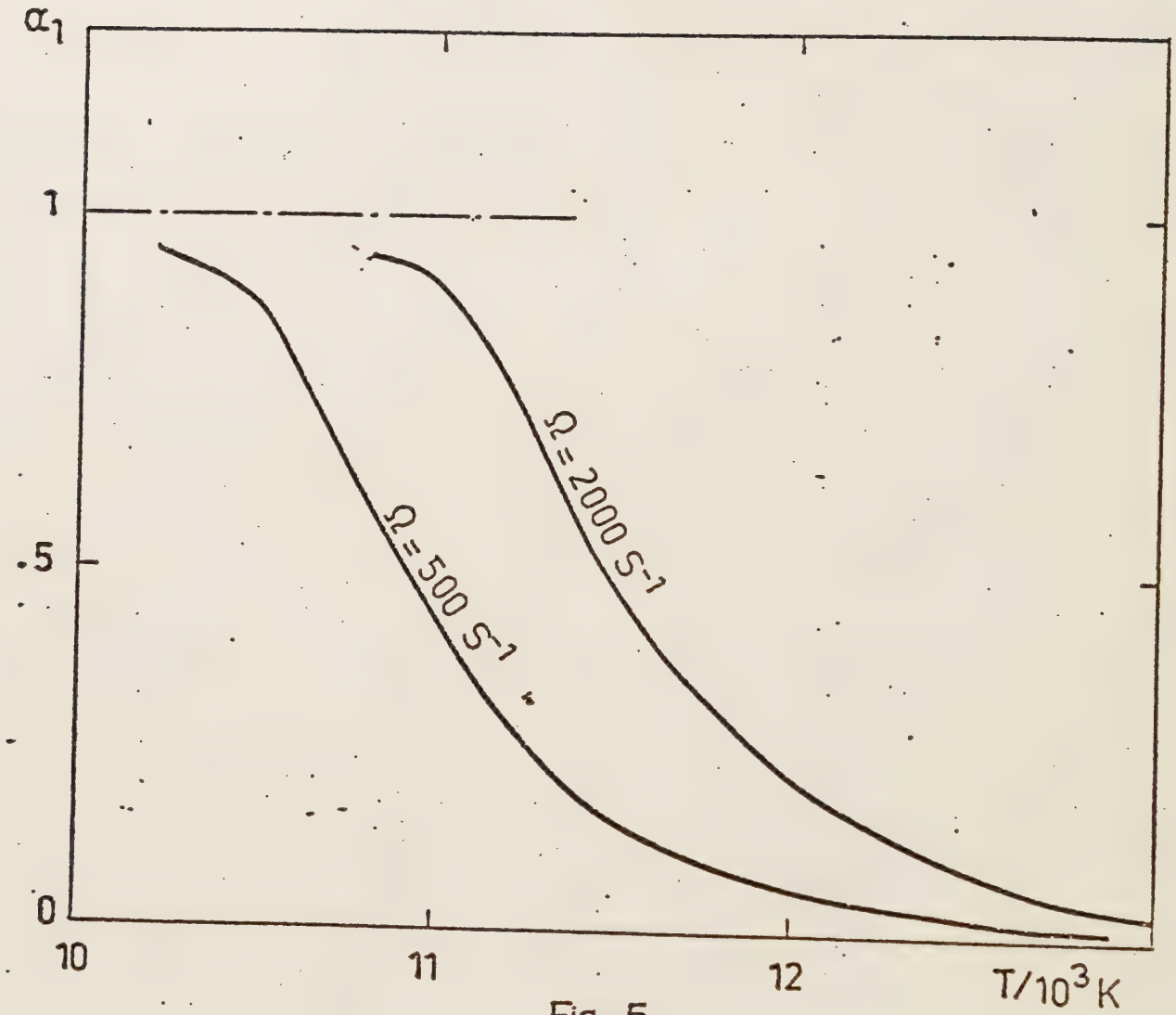


Fig-5

Submitted to The Astrophysical Journal

PULSAR THEORY OF SUPERNOVA LIGHT CURVES

II. THE LIGHT CURVE AND THE CONTINUOUS SPECTRUM

Bernard GAFFET

Division de la Physique, Section Etudes Spatiales
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, B.P. 2
91190 Gif-sur-Yvette (France)

Received

Subject headings : Supernovae - Pulsars

ABSTRACT

We present here calculations of supernova light curves assuming the existence of a central pulsar. We have shown in paper I that absorption of the pulsar waves can occur only after some cooling has taken place, and that the pulsar acts as a thermostat, keeping central temperature fixed around $1.3 \cdot 10^4$K ; the main absorption process is particle acceleration by the strong waves. Several difficulties inherent to most existing models are solved in this way : especially the rapid rise of luminosity before maximum, and the observed high values of expansion velocities. A good fit of the typical SN II light curves has been obtained. Furthermore, the continuous spectrum and the observed temperatures of about $1.0 \cdot 10^4$K near maximum can be explained easily in this model.

INTRODUCTION.

We consider here the supernova events which lead to the formation of a pulsar as a remnant star ; it has been pointed out by several authors (Colgate and McKee, 1969 ; Ostriker and Gunn, 1971) that the thermal energy released by the outburst is very likely not enough to account for the bulk of the energy radiated in the optical ($\sim 10^{49}$ ergs) ; hence the suggestion that the pulsar provides the required continuous energy input. (Ostriker and Gunn, 1971).

It is the purpose of this paper to investigate the light curves that one gets under these assumptions.

In paper I, we studied the dynamical effects of the strong waves radiated by a pulsar on the surrounding supernova ejecta ; contrary to the model of supernova introduced by Ostriker and Gunn, in which the outburst itself is the effect of the pulsar radiation pressure, it seemed to us more reasonable to assume a conventional origin of the outburst, like the thermonuclear explosion mechanism described by Colgate and White (1966). In our model, therefore, the outburst occurs nearly instantaneously (in less than a few hours), and the dynamical effects of the pulsar are rather small, on a global scale. However, it plays a crucial role as a heating source and accounts entirely for the observed light curve.

We have described in paper I how a cavity (of radius R_1 ; see fig. 1) is created in the central part of the homologously expanding ejecta, and we have seen that a shock wave appears (radius R_s), driven by the pulsar radiation pressure. This shock wave stays always very near the cavity radius R_1, so that the shocked region is (isothermally) highly compressed, by a factor of order of 10^4 with respect to the rest of the ejecta.

We have next considered the absorption of the pulsar waves on the interface of the compressed shell (R_1, R_1), and found it to be strongly temperature dependent, with essentially zero absorption above $1.4 \cdot 10^4$K and complete absorption below $1.2 \cdot 10^4$K (we considered the acceleration of He atoms by the strong waves as the main absorption process). As a consequence, the pulsar acts as a thermostat, and we shall see that it stabilizes the cavity temperature in the neighbourhood of $T_L = 1.2 \cdot 10^4$K.

In this paper, we investigate in detail the heat diffusion problem, using the results of paper I, which are summarized above ; we determine also the continuous spectrum, and the colour temperatures. A good fit of the typical SN II light curves is obtained, with a set of parameters for the supernova very similar to the generally accepted ones : ejected mass $M_s = 2.3$ Mo, peak luminosity $L_i = 5.5 \cdot 10^{42}$ ergs/s, total kinetic energy $W = 2.10^{51}$ ergs, time integrated luminosity $1.0 \cdot 10^{49}$ ergs. The rapid rise of the light curve is well reproduced, and also the post-maximum region, down to 4 magnitudes below maximum luminosity.

In section I we solve the diffusion equation, calculate the light curves and discuss the influence of parameters on the results. For the sake of simplicity and also to reduce the number of free parameters, considering the lack of accurate measurements, we assumed a uniform density distribution in the shell.

In section II we consider the problem of the continuous spectrum of the SN : in our model, all the material which has been piled up by the pulsar shock wave is confined in a very thin shell of high density ; it is then optically thick for free-free absorption at optical frequencies, and may be considered in this respect as the photosphere, since the optical depth for "true absorption" of the rest of

the shell is generally less than 1. However, the optical depth of the shell for Thomson scattering is large, and the radiation will not be black but considerably diluted, even though the shape of the spectrum may remain black. The optical depth for Thomson scattering is nevertheless not large enough to allow thermalization of the spectrum at the electron temperature ; the spectrum can be considered as made of a high frequency and a low frequency part, separated by the "cut-off frequency" ν_c for bremsstrahlung, i.e. the frequency below which the optical depth for free-free absorption is larger than 1 (ν_c happens to be in the infra-red). The low frequency part is black-body, at some temperature T_B and the high frequency part is very diluted, with a higher colour temperature.

We shall see that the high frequency spectrum evolves essentially in the same way as the cavity black-body radiation and that its colour temperature at t_{max} is not far below T_L, i.e. about $1.0.10^4$K. which agrees very well with observations. Furthermore, the colour temperature drops sharply within a few weeks down to about 5.10^3K..

In section III, we discuss more completely the comparison of our model with observations and with other models.

I. HEAT DIFFUSION - LIGHT CURVES.

In this section, we study the temperature evolution of the SN and the radiative heat diffusion problem, assuming for simplicity a uniform density in the envelope. The central cavity is filled with black-body radiation at uniform temperature T_1, since it is bounded by a high density thin shell (the mass M_1 swept up by the shock) which is optically thick.

The temperature evolution of cavity (function T_1 (t)) and the diffusion problem can be separated, the calculated function T_1 (t) being used as a boundary condition for the diffusion problem. For the simple case in which T_1 (t) is a constant the diffusion equation can be solved analytically, and we give an analytical expression for the radiated flux Y (t) from the supernova.

We have done the calculation both for an infinite medium, the radiated flux Y (t) being identified with the conduction flux at radius R_o, and for a finite medium bounded by the external radius R_o of the shell ; the calculated fluxes do not differ very much, except for late times when the luminosity becomes very low.

The SN becomes ionized very soon and the density is very low, so that the main source of opacity is Thomson scattering. The diffusion coefficient is then :

$$D = \frac{\lambda c}{3}$$

with : $\lambda = 1/n_e \sigma_{Th}$, and : $\sigma_{Th} = 665$ mb (Thomson cross section) ; assuming complete ionization $n_e \simeq n_H$. (Colgate and White, 1966 ; Colgate and McKee, 1969 ; Gordon, 1973).

1) Evolution of temperature and of the electromagnetic energy content of the cavity.

We assume that the initial heat due to the explosion can be neglected, since it is lost very fast from adiabatic expansion. In the calculations of Colgate and White (1966), the initial temperature is several times 10^9K and the initial radius about 10^4 km ; assuming homothetic expansion, the temperature would be less than 10^3K after ten days.

There are two phases to be considered in the evolution of the cavity :

. at the beginning the temperature T_1 varies very little, due to the "thermostat" effect. The electromagnetic energy (U_{EM}) is stored in the cavity. However, part of it must be changed into heat, to keep the temperature near T_L and to compensate for heat losses by conduction. These losses increase very fast with time, and, at some time t_L, the reservoir of electromagnetic energy is exhausted : $U_{EM}(t_L) = 0$.

. from this time t_L, the temperature begins to drop very fast due to conduction and adiabatic losses ; the path δ available for accelerating ions in the neutral sheet (see paper I) becomes large, and the ions become ultra-relativistic ; they are no more slowed down in the envelope, and the power radiated by the pulsar does not provide heat any more ; this accounts for the rapid decrease of the light curve after maximum.

a) Simplified calculation of $T_1(t)$ and $U_{EM}(t)$

Here, we assume that $T_1(t)$ is a constant T_L during the first phase $(t < t_L)$. We show in the next paragraph that the heat conduction flux is then :

$$\phi_c(t) = 4\pi u_L D R_1 \left(1 + \frac{16}{3} \sqrt{\frac{R_1^2}{2\pi D t}} \right) \qquad (1.1)$$

where u_L is the radiation energy density at temperature T_L, $D \sim t^3$ is the diffusion coefficient, and $R_1 \sim t^{1.2}$ ($u_L = 3\ P_L$).

Furthermore, to compensate for the increase of volume and adiabatic losses, a power ϕ_L must be provided to keep temperature $T_1 = T_L$:

$$\phi_L = \frac{4}{3}\,\pi\, R_1^2\, \dot{R}_1 \,.\, 4u_L \qquad (1.2)$$

The electromagnetic energy evolves consequently as :

$$\frac{d\ U_{EM}}{dt} = L_i - \frac{\dot{R}_1}{R_1}\, U_{EM} - (\phi_c + \phi_L) \qquad (1.3)$$

or, after integration :

$$U_{EM} = \frac{1}{R_1} \int_o^t R_1(t')(L_i - \phi_L - \phi_c)\, dt'$$

We define the characteristic time τ_c for conduction losses by :

$$4\pi\ u_L\ DR_1 = L_i \left(\frac{t}{\tau_c}\right)^{4.2} \qquad (1.4)$$

and the dimensionless parameter m as :

$$\phi_L = m\, L_i \left(\frac{t}{\tau_c}\right)^{2.6} \qquad (1.5)$$

Using the dimensionless time $\xi = t/\tau_c$, ϕ_L and ϕ_c can then be rewritten as :

$$\begin{cases} \phi_L/L_i = m\, \xi^{2.6} \\ \phi_c/L_i = \xi^{4.2} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{5m}{\pi}}\ \xi^{3.4} \end{cases} \qquad (1.6)$$

Integration of eq. (1.3) gives then :

$$U_{EM} = \frac{5}{11}\, L_i\, t \left(1 - \frac{11}{24}\, m\, \xi^{2.6} - \frac{11}{32}\, \xi^{4.2} - \frac{11}{21}\sqrt{\frac{5m}{\pi}}\ \xi^{3.4}\right) \qquad (1.7)$$

and we see that U_{EM} becomes zero for some value $\xi = X(m)$.
The function $X(m)$ is universal, and is plotted in fig. 2 ; the inverse function $m(X)$ can be written down analytically :

$$m = \left(\sqrt{\Delta} - \frac{4}{7}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\, X^{0.8}\right)^2 \quad \text{with} \quad \Delta = \left(\frac{80}{49\pi} - \frac{3}{4}\right)X^{1.6} + \frac{24}{11X^{2.6}} \qquad (1.8)$$

The temperature T_1 begins to decrease at time $t_L = X(m)\,\tau_c$.
Meanwhile, the thermal energy in cavity is, of course

$$U_{Th}^{cav.} = \frac{4}{3}\,\pi\, R_1^3\, u_L = \frac{5}{24}\, m\, L_i\, t\, \xi^{2.6} \qquad (1.9)$$

The dimensionless parameter m is a measure of the relative importance of ϕ_L and ϕ_c, and depends on physical parameters in the following way :

$$m \sim \left(\frac{M_s}{\dot{R}_o^3}\right)^{1/7} L_i^{\,2/21}\; T_L^{\,32/21}\; \sigma^{13/21} \qquad (1.10)$$

where $\dot{R}_o$ is the (constant) expansion velocity of the external edge of the SN, and σ the scattering cross section.
The characteristic time τ_c varies as :

$$\tau_c \sim \left(\frac{M_s}{\dot{R}_o^3}\right)^{2/7} L_i^{\,4/21}\; T_L^{\,-20/21}\, \sigma^{5/21} \sim m^2\; T_L^{\,-4}\, \sigma^{-1} \qquad (1.11)$$

It is interesting to note that the total electromagnetic and thermal energy, taking account of thermal energy in the envelope $U_{Th}^{env.}$ must be equal to $5/11\; L_i t$, a consequence of the expansion law $R_1 \sim t^{1.2}$. In particular, at time $t = t_L$, the total thermal energy content of the SN is :

$$\left.U_{Th}^{cav.} + U_{Th}^{env.}\right|_{t_L} = \frac{5}{11}\, L_i\, t_L$$

We shall see that the optical maximum t_{max} is not far from t_L : hence, the time-integrated luminosity must be roughly $0.5\; L_i\; t_L$, since adiabatic losses are not large at this time.

For the case $t > t_L$, we generalize expression (1.1) for the conduction flux as follows :

$$\phi_c = 4\pi\, u(T_1)\, DR_1 \left(1 + \frac{16}{3}\sqrt{\frac{R_1^2}{2\pi Dt}}\right) \qquad (1.12)$$

which is only qualitatively correct. We will show in the next section the right way to find $U_{Th}^{cav.}$ and $T_1(t)$ without using this approximation. Within this approximation (1.12), we get the following expression for thermal energy :

$$U_{Th}^{cav.}\ (t > t_L) = U_{Th}^{cav.}(t_L)\ \frac{x^{1.2}}{\xi^{1.2}}\ \exp-\left\{\frac{3}{m}(\xi^{1.6}-x^{1.6})+8\sqrt{\frac{5}{\pi m}}(\xi^{0.8}-x^{0.8})\right\} \quad (1.13$$

We show in fig. 3 the function $U_{Th}^{cav.}(t)$ defined for $t < t_L$ by eq. (1.9) ; in fig. 4, the corresponding temperature evolution (functions $T_1(t)$) for several values of m ; and in fig. 5 the conduction flux ϕ_c, from eq. (1.1).

It is interesting to note the peaked shape of the conduction flux $\phi_c(t)$. For $t > t_L$, we did not use the approximate formulas (1.12) and (1.13) but the exact formulas (1.21), (1.22), (1.32) developed in section (I.2).

b) More realistic calculation. Accurate definition of T_L

Up to now, we have given only a rough estimate of the "plateau" temperature T_L ; in this paragraph we shall calculate more realistically the temperature $T_1(t)$ and give an accurate definition of T_L. We keep the expression (1.2) for ϕ_c ; however we must add to ϕ_L a term corresponding to thermal inertia, since temperature is now allowed to vary ; ϕ_L is then replaced by :

$$\Psi_L = \frac{1}{R_1}\frac{d}{dt}\left(R_1\, U_{Th}^{cav.}\right) = \frac{4\pi}{3R_1}\frac{d}{dt}\left(u(T_1)R_1^4\right) \qquad (1.14)$$

The evolution of U_{EM} is given by the equation :

$$\frac{d}{dt}\,(R_1\,U_{EM}) = R_1\,(\eta\,L_i - \phi_c - \psi_L) \qquad (1.15)$$

or :

$$\frac{d}{dt}\,(R_1(U_{EM}+U_{Th}^{cav.})) = R_1(\eta\,L_i - \phi_c)$$

where η is an efficiency factor which is less than 1 when losses other than thermal or adiabatic occur ; in fact $(1 - \eta)\,L_i$ is the power for cosmic ray production ; η is essentially 1 before time t_L, and 0 after. We still need one more equation, involving the absorption coefficient α for the electromagnetic waves (the coefficient α defined in paper I). This equation has different forms, depending on whether the waves are purely radial or distributed isotropically in the cavity.

For isotropic waves, the energy density u is uniform :

$$U_{EM} = \frac{4}{3}\,\pi\,R_1^3\,u$$

the incoming flux is : $\frac{c}{4}\,u\,.\,4\pi R_1^2$, and the absorbed power (or heat production rate) :

$$H(t) = \frac{3}{4}\,U_{EM}\,.\,\frac{c}{R_1}\,.\,\alpha \qquad \text{(isotropic waves)} \qquad (1.16)$$

However, for radial waves, the energy density goes as $1/r^2$ and of course only outgoing waves can be absorbed ; the ratio of outgoing to incoming waves is $\frac{1}{1-\alpha}$, so we get the result :

$$H(t) = U_{EM}\,.\,\frac{c}{R_1}\,.\,\frac{\alpha}{(2-\alpha)} \qquad \text{(radial waves)} \qquad (1.17)$$

According to Monaghan (1973), and in view of the large number of reflections that the radiation undergoes, the cavity should be nearly spherical and the radiation almost isotropic. We then choose formula (1.16), which we rewrite as :

$$\phi_c + \psi_L = \frac{3}{4} U_{EM} \frac{c}{R_1} \alpha_1(k\delta) . \qquad (1.18)$$

From equations (1.15) and (1.18), we get $\frac{d}{dt}(U_{Th}^{cav.})$ and $\frac{d}{dt} U_{EM}$ as a function of t, $U_{Th}^{cav.}$ and U_{EM} ; we solve numerically this differential equation, and find the time t_L for which $U_{EM} = 0$.
From eq. (1.10) and (1.11) we know that $t_L \sim X(m)/m^{5/8}$ (the free parameter is here in fact T_L) ; the calculated value of t_L determines m, and from m we get T_L. These values m and T_L define the parameters of the "equivalent" simplified model of the preceding paragraph ; the word "equivalent" has here the meaning that, for both cases, $U_{EM} = 0$ and $U_{Th}^{cav.} + U_{Th.}^{env.} = \frac{5}{11} L_i t_L$ have the same value at the same time t_L ; the subsequent evolution is then practically the same in the two cases.

In the following, we will use the "equivalent simplified model", in which the cavity temperature is a constant T_L as long as $t \leqslant t_L$.

We show in fig. (6) the temperature T_1 (t) resulting from a realistic calculation : between 0.5 and 0.9 t_L, the decrease of temperature is very small compared to the adiabatic rate ; furthermore, the temperature in this region is nearly always between 1.2 and $1.4.10^4$K, independently of the particular choice of parameters.

In fig. 6, we used the values : $\Omega_i = 2000\ s^{-1}$, $L_i = 10^{43}$ ergs/s, $M_s = 2.5$ Me, $\dot{R}_o = 10^4$ km/s, from which we find : the kinetic energy $W = 1.5.10^{51}$ ergs, $\tau_c = 4.72.10^6$s = 54 days, $\frac{W}{L_i \tau_c} = 32.$, $R_o/R_1\ (\tau_c) = 2.43$, $\dot{R}_1\ (\tau_c) = 4.94.10^3$ km/s, and the dimensionless parameters m = 0.534, $t_L/\tau_c = X = 0.980$; the temperature T_L of the "equivalent" model is : $T_L = 1.20.10^4$K.

In principle, T_L depends upon m and $\Omega_i/\dot{R}_1$, but the dependence on m is very weak as shown in fig. 7 ; for any reasonable value of $\Omega_i/\dot{R}_1$ the change in T_L is at most one thousand degrees, so that T_L is always near $1.2.10^4$K.

2. Heat diffusion through the expanding envelope.

The diffusion equation can be written, in the local rest frame of expanding material :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \, \Delta n \qquad (1.19)$$

where n is, for example, the photon number density.

Since we assume an homologously expanding envelope, the coordinates of the rest frame are :

$$\vec{r}' = \frac{t_o}{t} \vec{r}$$

where t_o is an arbitrary epoch.

The velocity of light is : $c' = \frac{t_o}{t} c$, the mean free path $\lambda' = \frac{t_o}{t} \lambda$, and consequently the diffusion coefficient $D' = \frac{\lambda' c'}{3} = \left(\frac{t_o}{t}\right)^2 D$.

In the following we drop the primes for simplicity, but we shall still use this co-moving reference frame.

In our case D is uniform, but time dependent ($D \sim t^3$, $D' \sim t$) ; however, the equation has the same form whatever the time dependence of D is, since eq. (1.19) may be rewritten :

$$4 \frac{\partial n}{\partial \Omega} = \Delta n \qquad (1.20)$$

after introducing the new variable $\Omega = 4 \int D \, dt$ (Aly et al., 1974).

The diffusion equation (1.20) is linear, and can be solved by summation of the elementary solutions n (r, Ω, a) which describe the diffusion of one particle emitted at r = a and Ω = 0.

Defining W(t), the power radiated by the cavity considered as a blackbody at temperature $T_1(t)$, $\phi_c(t)$, the conduction flux at radius $a = t_o/t.R_1$, and H(t), the total heat production rate, we have :

$$\begin{cases} W(t) = 4\pi a^2 \sigma T_1^4 = \frac{3c}{4a} U_{Th}^{cav.} \\ \phi_c(t) = - 4\pi \, a^2 \, D \, \vec{\nabla} u \\ H(t) = \frac{3}{4} \frac{c}{a} \propto U_{EM}(t) = \phi_c + \phi_L \end{cases} \qquad (1.21)$$

and the complete solution of eq. (1.20) for the energy density u can be written as :

$$u(r, t) = \int_o^t n_T(r, \Omega, a)\, \frac{t'}{t}\, W(t')dt'$$

$$= \int_o^t n_c(r, \Omega, a)\, \frac{t'}{t}\, \phi_c(t')dt' \qquad (1.22)$$

$$= \int_o^t n_H(r, \Omega, a)\, \frac{t'}{t}\, H(t')dt'$$

The factors t'/t are there to account for adiabatic losses ; in fact, the diffusion equation (1.20) applies to the quantity $\frac{tu}{t'}$.

The elementary solutions n_T, n_c, n_H may be distinguished by their boundary conditions at radius a :

$$\begin{cases} n_T(a) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial n_c}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial n_H}{\partial r}\right|_{r=a} = \dfrac{4a}{3}\, \dfrac{\partial n_H(a, \Omega)}{\partial \Omega} \end{cases} \qquad (1.23)$$

The first condition (zero density) is associated with an imposed density at radius a : the black-body energy density ; the second (zero flux) is associated with a given flux at r = a ; the third expresses particle conservation (zero heating rate).

The conditions (1.23) can also be interpreted as, respectively : 1) a condition of free escape at radius a ; 2) complete reflection at radius a ; 3) free exchange of energy between shell and cavity, the diffusion coefficient being infinity in the cavity.

The simple model of the 1st paragraph gives values of $W(t)$ and $\phi_c(t)$ only for $t < t_L$, and $H(t)$ for all times ($H(t)$ is just zero for $t > t_L$) ; for the light curves, the most useful function is therefore $n_H(r, \Omega)$. However, for the spectrum, the function $n_T(r, \Omega)$ is to be use as we assume that the radiation becomes thermalized (black-body at temperature $T_1(t)$) everytime it goes back to the cavity (see section II).

We first consider the simpler case of an infinite medium, bounded only by the radius of the cavity, and then the finite case, in which there is another boundary : the exterior radius R_o (the "photosphere").

The functions n_T, n_c, n_H will be calculated assuming an homologously expanding cavity, for simplicity ; a is then a constant in the co-movin frame, whereas the true radius R_t is proportional to $t^{0.2}$; we define : $a = R_1(\tau_c)$. This has nearly no influence on the results.

a) Infinite medium :

It is easy to check that a solution of the diffusion equation (1.20) is :

$$n_o(r, \Omega, a) = \frac{1}{4\pi^{3/2}a} \left(F(r, \Omega, a) - F(r, \Omega, -a)\right) \qquad (1.24)$$

with : $$F(r, \Omega, a) = \frac{1}{r\sqrt{\Omega}} e^{-\frac{(r-a)^2}{\Omega}}$$

It describes the diffusion of one particle injected at $\Omega = 0$, $r = a$, when there is no cavity. However, we obtain the function n_T from it by differentiation :

$$n_T^{(\infty)}(r, t, t', a) = \frac{2\lambda(t')}{3\pi^{3/2}a} \frac{\partial F}{\partial a} = \frac{4\lambda(t')}{3\pi^{3/2}a} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{1}{\Omega^{3/2}} e^{-\frac{(r-a)^2}{\Omega}} \qquad (1.25)$$

Of course, the total number of particles is not conserved :

$$N_T(t,\ t',\ a) = \iiint_{(r>a)} n_T\ d_3\vec{r} = \frac{4\lambda(t')}{3a}\left(1 + \frac{2a}{\sqrt{\pi\Omega}}\right) \qquad (1.26)$$

There is a finite probability, $\frac{4\lambda(t')}{3a}$, that the particle will never go back to radius a. This function n_T can also be obtained as the solution of a random walk problem (Chandrasekhar, 1953 ; Sobolev, 1943 ; Kaplan et al., 1960 ; Kaplan and Sivers, 1961).

The normalization in eq. (1.25) is choosen so that the density N(r=a,t) and the photon emission rate $\varphi(t)$ are related by

$$\varphi(t) = \pi\ a^2\ c\ N$$

as it should be for a black-body source.

. Application to the case of constant temperature ($t < t_L$).

In that case ($T_1 = T_L$), the flux W(t) is proportional to t^2, and we find from eq. (1.22) and (1.25) :

$$u\ (r,\ t) = u_L\ \frac{a}{r}\ K\left(\frac{(r-a)^2}{2Dt}\right) \qquad (1.27)$$

where the function K(x) is defined as :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^2\ \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\ dz$$

The conduction flux at radius r is :

$$Y(r,\ t) = -\ 4\pi\ r^2\ D\ \frac{\partial u}{\partial r} \qquad (1.28)$$

or, from eq. (1.27) :

$$Y(r,\ t) = \frac{4\lambda}{3a}\ W(t)\left(K(x) - \frac{2xK'(x)}{1-\frac{a}{r}}\right) = 4\pi\ a\ D\ u_L \left(K(x) - \frac{2xK'(x)}{1-\frac{a}{r}}\right) \qquad (1.29)$$

Using the numerical values : $K(0) = 1$, $\sqrt{x}\, K'(x) \xrightarrow[(x \to 0)]{} -\frac{8}{3\sqrt{\pi}}$, we find the conduction flux ϕ_c at the cavity radius, which we already used in the last paragraph (eq. (1.1)) :

$$\phi_c = 4\pi\, a\, D\, u_L \left(1 + \frac{16\, a}{3\sqrt{2\pi D t}}\right) \tag{1.30}$$

We go back now to general case, where T_1 is any given function of time.

We just give here the solutions n_c and n_H without calculations (see appendix) :

$$n_c^{(\infty)} = \frac{e^{-x}}{2\pi^{3/2} a r} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\Omega}} - \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\, U\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{\Omega}}{2a}\right) \right\} \tag{1.31}$$

where, as usual, $x = (r-a)^2/\Omega$, and the (holomorphic) function $U(\alpha)$ is :

$$U(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}\, du}{u^2+\alpha^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{\alpha^2} \int_{\alpha^2}^{+\infty} \frac{e^{-z}\, dz}{\sqrt{z}}$$

The function $n_H^{(\infty)}$ is expressed in terms of the same function $U(\alpha)$:

$$n_H^{(\infty)} = \frac{3\, e^{-x}}{2\pi^2 a^2 r} \left\{ e^{i\pi/3}\, U\left(\sqrt{x} + e^{-i\pi/6}\, \frac{\sqrt{3\Omega}}{2a}\right) + \text{complex conjugate} \right\} \tag{1.32}$$

The conduction flux $Y(r,t)$ is then, for any time, given by eq. (1.21), (1.22), (1.28) and (1.32). For $r = a$, we get the exact value of the conduction flux ϕ_c $(t > t_L)$, and the exact temperature T_1 $(t > t_L)$ by the energy density u $(r = a,\ t)$.

It should be noted that the functions ϕ_c and $T_1(t)$ depend only on one dimensionless parameter, m (See fig. 4 and 5).

b) Finite shell, bounded by a photosphere at radius $R_o = q.a$.

We give in appendix the generalization of the functions n_T, n_c and n_H (r, Ω, a) for the finite case. They are expressed in the form

of rapidly converging series, each term being separable in the x and r variables :

$$n(r,\ t,\ t',\ a) = \frac{1}{r} \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\ e^{-\alpha_p^2/4x}\ \sin\left(\alpha_p \frac{(R_o - r)}{(R_o - a)}\right) \qquad (1.33)$$

and the coefficients a_p and α_p are given in appendix.

Equation (1.28) for the radiated flux $Y(R_o, t)$ becomes, since $u\ (R_o, t) = 0$:

$$Y(R_o,\ t) = -\ 4\pi\ R_o D \int_o^t \left.\frac{\partial(r\ n_H)}{\partial r}\right|_{r=R_o} \cdot \frac{t'}{t}\ H(t')dt' \qquad (1.34)$$

The series (1.33) becomes slowly converging when $x \to \infty$, and we calculated the flux using the following asymptotic values :

$$\left.\frac{\partial(rn)}{\partial r}\right|_{R_o} \underset{(x\to\infty)}{=} 2 \cdot \left.\frac{\partial(r\ n^{(\infty)})}{\partial r}\right|_{R_o} \qquad (1.35)$$

The function n_T can also be developed according to the infinite series of images of the source (r=a) in the "mirrors" r = a and $r = R_o$ (Appendix)

$$n_T = \frac{4\lambda(t')}{3a\ r} \cdot \frac{1}{(\pi\ \Omega)^{3/2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (r - r_n)\ e^{-\frac{(r-r_n)^2}{\Omega}} \qquad (1.36)$$

where $r_n = a + 2n(R_o - a)$ is the radius of the n^{th} image.

From these expressions for the density n_T, we found the conduction flux $\phi_c(t)$ for the finite case and for constant temperature $(T_1 = T_L)$:

$$\phi_c(t) = \frac{4\lambda(t)}{3a}\ W(t) \left(\frac{R_o + 4a\ S(x)}{R_o - a}\right) \qquad (1.37)$$

where $S(x) = \sum_1^{+\infty} T\left(\frac{p^2\pi^2}{4x}\right)$ and $T(u) = \frac{1}{u} - \frac{1 - e^{-u}}{u^2}$

However, we checked that for cases of practical interest this formula which takes account of the radiation leakage from the photosphere R_o is equivalent to the simpler formula (1.1), with an accuracy of order 5% ; consequently, we adopted eq. (1.1) for the conduction flux $\phi_c(t < t_L)$ and used eq. (1.33) to (1.36) only to calculate the light curve $Y(R_o, t)$.

3. Light curves - Discussion of results.

a) Scaling laws.

The shape of the light curves depends upon two dimensionless parameters : m and $q = R_o/R_1$ and two other parameters, τ_c and L_i, give the absolute scales.

We shall use the following "standard" values, or "units" :

$L_i = 10^{43}$ ergs/s ; $\dot{R}_o = 10^4$ km/s ; $M_s = 5.10^{33}$ g $\simeq 2.5$ Mo ;

$T_L = 1.20.10^4$ K ; the corresponding total kinetic energy is :

$W = 0.3\, M_s \dot{R}_o^2 = 1.5.10^{51}$ ergs, and the parameter $A = \dfrac{M_s}{\dot{R}_o^3} = 5.10^6$ C.G.S.

The dimensionless parameters can then be written :

$$\begin{cases} m = 0.542\, A^{1/7}\, L_i^{2/21}\, T_L^{32/21}\, \sigma^{13/21} \\ q = \left.\dfrac{R_o}{R_1}\right|_{\tau_c} = \left(\dfrac{66}{25}\dfrac{W}{L_i \tau_c}\right)^{0.2} = 2.41\, \dfrac{A^{1/7}\, \dot{R}_o\, T_L^{4/21}}{L_i^{5/21}\, \sigma^{1/21}} \end{cases} \qquad (1.38)$$

The two other parameters, which give the scale, are : L_i and τ_c :

$$\begin{cases} \tau_c = 4.82 \,.\, 10^6 \text{s}\ \dfrac{A^{2/7}\, L_i^{4/21}\, \sigma^{5/21}}{T_L^{20/21}} \\ \qquad = 1.64 \,.\, 10^7 \text{s}\ \dfrac{m^2}{T_L^4 \sigma} \end{cases} \qquad (1.39)$$

It is interesting to note that the dependence of m on L_i and on M_s is very weak : m depends mostly on $\dot{R}_o$, being proportional to $\dot{R}_o^{-3/7}$ for fixed M_s, or to $\dot{R}_o^{-5/7}$ for fixed W. Furthermore, it is remarkable that our time-scale, τ_c, depends much more weakly on the total mass ($\tau_c \sim M_s^{2/7}$) than the diffusion time, which is proportional to $\sqrt{M_s}$. From the last formula in eq. (1.39), since T_L is essentially a constant, we see that m may be viewed as defining the time scale τ_c.

The supernova radius at time τ_c (τ_c is always near t_{max}, the time of optical maximum) is :

$$R_o(\tau_c) = \dot{R}_o \tau_c = 4.82 \cdot 10^{10} \text{km } M_s^{2/7} \dot{R}_o^{1/7} L_i^{4/21} \frac{\sigma^{5/21}}{T_L^{20/21}} \qquad (1.40)$$

it depends very weakly on any parameter (M_s, $\dot{R}_o$, L_i) and is always of order 5.10^{10} km.

The matter density at time τ_c is also nearly a constant, since T_L is given :

$$\rho_{oc} = 1.06 \cdot 10^{-14} \text{ g/cm}^3 \cdot \frac{A^{1/7} T_L^{20/7}}{L_i^{4/7} \sigma^{5/7}} \qquad (1.41)$$

Our standard value for the electron density at $t = \tau_c$ is then : $n_e = 0.64.10^{10}$ cm^{-3}, to be compared with the density calculated by C. Gordon (1973) : 0.8 to $1.2.10^{10}$ cm^{-3}.

From m and q, we define two other important parameters :

a) $$x_c = \left.\frac{(R_o - R_1)^2}{2Dt}\right|_{\tau_c} = \frac{5}{16} m(q-1)^2 \qquad (1.42)$$

which characterizes the diffusion time relative to τ_c ;

b) $$k_c = \frac{2}{3} \frac{c}{\dot{R}_o} \frac{q}{(q-1)} x_c = \frac{5}{24} m\, q(q-1) \frac{c}{\dot{R}_o} \qquad (1.43)$$

the optical depth at $t = \tau_c$, which involves a third dimensionless parameter : $c/\dot{R}_o$.

b) Light curves :

We calculated the light curves as shown in paragraph 2, using eq. (1.33) for n_H, (1.34) for the radiated flux, and (1.6), (1.21) for the heat power H(t). We show the results for several values of m, q = 2 (fig. 8) and q = 4 (fig. 9) in dimensionless coordinates Y/L_i, and $\xi/\sqrt{x_c} = 1/\sqrt{x}$; ($1/\sqrt{x}$ can also be written : t/t_d, thereby defining the "diffusion time" t_d).

We give also the light curves with an absolute time scale (fig. 10), assuming that temperature T_L is $1.2.10^4$K, according to the results of paragraph (1b).

c) Comparison with the data.

We could find a satisfactory fit of the "typical light curve of SN II" published by Shklovsky (1968) at least for luminosities higher than $2.10^{-2}\ Y_{max}$ (fig. 11) ; the parameters of the fit are :

$$q = 3.,\ m = 0.47$$

the date of maximum is then : $t_{max} \simeq 48$ days, and $\tau_c = 42$ days.

There is an infinite set of parameters (M_s, W, $\dot{R}_o$, L_i) which would give the same light curve, scaled by the factor L_i ; using the kinetic energy W as parameter, we find from eq. (1.38) :

$$L_i \sim W,\ \dot{R}_o \sim W^{1/3},\ M_s \sim W^{1/3} \qquad (1.44)$$

This infinite set of solutions is shown in fig. 12 ; one of them is : $W = 2.10^{51}$ ergs, $L_i = 6.10^{42}$ ergs/s, $M_s = 2.3\ M_\odot$, with a time integrated luminosity $\int Y\,dt \simeq 5/11\ L_i\ \tau_c = 1.0.10^{49}$ ergs.

These values are quite compatible with the data, and very similar to the generally accepted values for SN II ; the deduced mass

is compatible with the idea that pulsars originate from stars of 4 to 8 M⊙, since the pulsar mass is of order 1.5 M⊙.

We have also plotted in fig. 11 the light curve of the SN III (SN 93 in NGC 4303) from Shklovsky, and our fit with parameters :

$$q = 3.5 \; ; \; m = 0.60 \; (\tau_c = 69 \text{ days}, \; t_{max} = 83 \text{ days})$$

The general form of the solution is :

$$W = 7.10^{51} \text{ ergs} \cdot \lambda \; ; \; L_i = 6.10^{42} \text{ ergs/s} \cdot \lambda \; ; \; M_s = 10 \, M_\odot \cdot \lambda^{1/3} \; ;$$
$$\dot{R}_o = 1.1 \cdot 10^4 \text{ km/s} \cdot \lambda^{1/3} \; ; \; \int Y \, dt = 1.8 \cdot 10^{49} \text{ ergs} \cdot \lambda \, .$$

II. THE CONTINUOUS SPECTRUM.

It is an interesting property of SN that they have nearly black-body spectra near optical maximum and that in fact the continuum remains detectable for a long time (one year or more). If the emitted light is not the residue of the initial heat produced by the explosion, it is not easy to explain the formation of the continuum, as the SN is optically thin for free-free absorption ; however, in the pulsar model of SN, part (or all) of the material is concentrated in a very thin shell, at radius R_1, with a density of order 10^4 times the average density of the SN (see paper I) ; this compressed shell is then optically thick for F-F absorption, and radiates as a black-body at the cavity temperature $T_1(t)$.

In a pure diffusion model the resulting spectrum would be an average over the time of such black-body spectra ; indeed it can be checked easily that, even though the SN is optically thick for Thomson scattering, it is far too thin to change the spectrum appreciably and make it evolve to a Planck distribution at the electron temperature (see Weymann, 1965 ; Peebles, 1971 ; Zeldovich and Sunyaev, 1969).

Also, the recombinations are unable to produce a large amount of photons, as they are at once followed by another ionization (this is the basis of the "on the spot" approximation for the radiative transfer in planetary nebulae for instance ; see Millar 1975, Hummer 1968).

However, the low-frequency part of the spectrum undergoes free-free absorption (up to some cut-off frequency ν_c ; see Kompaneets, 1957) and builds up a black-body spectrum at some temperature T_B ; as the total thermal energy of electrons is completely negligible, their equilibrium temperature T_e is determined by the photon spectrum.

1) Free-free opacity of the compressed shell.

Neglecting the Gaunt factor, the free-free absorption cross section for hydrogen is :

$$\sigma_{ff} = \frac{3.69 \cdot 10^{8} \text{cm}^2 \cdot n_e}{T_e^{1/2} \cdot \nu^3} \qquad (2.1)$$

and the corresponding optical depth :

$$\tau_{ff} = \delta R_1 \; n_1 \; \sigma_{ff} \qquad (2.2)$$

τ_{ff} is therefore proportional to $U_{EM}(\xi)/(\nu^3 \xi^{5.4})$, or :

$$\tau_{ff} \sim \frac{1}{\nu^3 \; \xi^{5.4}} \left(1 - \frac{11}{24} \, m \, \xi^{2.6} - \frac{11}{32} \, \xi^{4.2} - \frac{11}{21} \sqrt{\frac{5m}{\pi}} \, \xi^{3.4}\right) \qquad (2.3)$$

and it is steadily decreasing.

We want to show now that τ_{ff} is large, at least in the optical range of frequencies, up to the time when half of the total heat has been produced and that consequently the cavity radiation is mostly black-body radiation.

We have seen in the last section that the total heat present in the SN and the electromagnetic energy are related by :

$$U_{Th}^{Tot} + U_{EM} = \frac{5}{11} L_i t \quad (t \leq t_L)$$

and therefore about one half of the total heat has been produced when

$$U_{Th}^{Tot} = \frac{5}{22} L_i t \quad ; \text{ this happens for } \xi = \xi_o \simeq 0.8 \ ;$$

the pressure is :

$$P_{EM}(\xi_o) = \frac{12}{11} \cdot \frac{P_L}{m \, \xi_o^{2.6}} \sim \frac{1}{m}$$

since P_L and ξ_o are nearly constants.

The free-free optical depth at this time $\xi_o \tau_c$ is, from eq. (2.1) and (2.2) :

$$\tau_{ff}(\xi_o) \sim \delta R_1 \cdot \frac{n_1^2}{\nu^3}$$

or :

$$\tau_{ff}(\xi_o) \sim \rho_o \, R_1 \, P_{EM}\Big|_{\xi_o} \cdot \frac{1}{\nu^3}$$

We find finally, using the scaling laws of section (I.3) :

$$\tau_{ff}(\xi_o) = 26. \ m \left(\frac{10^{43} \text{ergs/s}}{L_i} \right)^{1/3} \left(\frac{\lambda}{0.4 \ \mu} \right)^3 \qquad (2.4)$$

We see that the optical depth is indeed rather large in the optical range. At higher frequencies, for which $\tau_{ff} < 1$, the spectrum could be due to bremsstrahlung from a thermal distribution of electrons this could explain the lack of U.V. radiation with respect to a black-body distribution, as observed by Kirshner et al. (1973).

2) Free-free absorption in the envelope. Cut-off frequency.

The optical depth seen by a photon trapped in the envelope depends upon how long it will stay before escaping or going back to the cavity, where it will be thermalized at the new cavity temperature. This "life-time" is therefore the life-time associated with function n_T of

eq. (1.22), and it is defined by the exponential $\exp - \frac{\pi^2 \Omega}{4(R_o - R_1)^2}$, or : $\exp - \frac{\pi^2 (\xi^2 - \xi'^2)}{4 x_c}$, so that a photon trapped in the envelope at time $\xi' \tau_c$ has a life-time $(\xi - \xi')\tau_c$, with :

$$\xi^2 = \xi'^2 + \frac{4 x_c}{\pi^2} \qquad (2.5)$$

The optical depth for Thomson scattering seen by a photon between times ξ and $\xi + d\xi$ is :

$$ds = s_o \frac{d\xi}{\xi^3} \qquad (2.6)$$

where s_o is related to the optical thickness k_c (eq. 1.43) by :

$$s_o = k_c \frac{c}{\dot{R}_o} \frac{q}{(q-1)} = \frac{5}{24} m q^2 \left(\frac{c}{\dot{R}_o} \right)^2$$

We may define in the same way the optical depth for free-free absorption

$$d\sigma = \left(\frac{\nu_T}{\nu} \right)^3 \cdot \frac{5\, d\xi}{\xi^6}$$

where the extra factor ξ^{-3} comes from the density dependence of the cross-section ; the frequency ν_T is a constant.

A photon trapped between times ξ' and ξ will then see an optical depth :

$$\Delta\sigma = \left(\frac{\nu_T}{\nu} \right)^3 \cdot \left(\frac{1}{\xi'^5} - \frac{1}{\xi^5} \right) \qquad (2.7)$$

and ξ, ξ' are related by eq. (2.5)

The optical depth $\Delta\sigma = 1$ defines the cut-off frequency ν_c (Kompaneets, 1957) ; below this frequency ν_c, there is equilibrium between bremsstrahlung and free-free absorption, and the spectrum is black-body ; at higher frequencies, free-free absorption dominates, but becomes smaller and smaller, as it is proportional to ν^{-3}. So :

$$\left(\frac{\nu_c}{\nu_T}\right)^3 = \frac{1}{\xi^{15}} - \frac{1}{\xi^5} \qquad (2.8)$$

ν_c is a decreasing function of time ; at time $\tau_c(\xi=1)$, we have :

$$\left(\frac{\nu_c(1)}{\nu_T}\right)^3 = \left(1 - \frac{4\ x_c}{\pi^2}\right)^{-5/2} - 1$$

Using the values of the last section for SN II : m = 0.47, q = 3, we find :

$$\frac{\nu_c(1)}{\nu_T} = 0.99$$

The characteristic frequency ν_T of eq. (2.7) may also be defined as :

$$\sigma_{ff}(\nu_T,\ n_e(\tau_c)) = \frac{5}{s_o} \cdot \sigma_{Th} \qquad (2.9)$$

it follows from eq. (2.1), (2.7), (1.38) and (1.41) that ν_T varies like $\left(m\ q\ \frac{c}{R_o}\right)^{2/3} \cdot L_i^{-2/9}$. Numerically :

$$h\ \nu_T = 0.058\ eV \left(m\ q\ \frac{c}{R_o}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{10^{43}\ ergs/s}{L_i}\right)^{2/9} \cdot \left(\frac{10^4 K}{T_e}\right)^{1/6} \qquad (2.10)$$

and, in fact, the factor $\left(\frac{10^4}{T_e}\right)^{1/6}$ may be neglected.

For m = 0.47 and q = 3, we find : $\nu_T = 1.68 \cdot 10^{44}$ Hz, or $h\ \nu_T = 0.70$ eV the cut-off frequency at time τ_c is then in the infra-red ($\lambda_c \simeq 2\mu$).

We therefore conclude that the visible and U.V. spectra (which means the bulk of the radiated energy) are unaltered by free-free absorption, and that they evolve adiabatically in a pure scattering envelope.

3) Calculated spectrum.

As we have already noted in the last section, the relevant solution of the diffusion problem for the spectrum is n_T, rather than n_H or n_C ; the spectrum is then given by :

$$I(\nu) = \int_o^t \left.\frac{\partial n_T(r,\ t,\ t')}{\partial r}\right|_{R_o} \cdot B(\nu,\ T_1(t'))\ W(t')dt' \qquad (2.11)$$

where $B(\nu, T)$ is the black-body spectrum.

The radiation is highly diluted in the envelope, and the Planck distribution $B(\nu, T)$ should be replaced at statistical equilibrium by a Boltzman distribution $B^d(\nu, T') \sim \nu^3 \exp -(h\nu/kT')$, with temperature $T' = 0.90\ T$ from energy conservation. However, we have seen that Thomson opacity is not large enough to put the photon spectrum in thermal equilibrium, and we therefore used the Planck distribution in eq. (2.11).

We show for the values $m = 0.47$, $q = 3$, the resulting spectra (fig. 13), and the colour temperature T_c from the calculated B-V index (fig. 14). The maximum colour temperature, $1.0 \cdot 10^4$K comes very close to the value $9.5 \cdot 10^3$K given by Kirshner (1973) ; furthermore, the rapid decrease of T_c down to $5 \cdot 10^3$K in less than 2 weeks is well reproduced.

Contrary to the results of ordinary diffusion models, we expect that the colour temperature should be lower before t_{max}, instead of higher.

III. CONCLUSION :

In the pulsar theory of supernovae, the average values of the kinetic energy, $W \sim 1$ or 2.10^{51} ergs, and of pulsar luminosity, $L_i \sim 10^{43}$ ergs/s, lead to a pulsar kinetic energy $\frac{I \Omega^2}{2}$ of the same order of magnitude than W (Ostriker and Gunn, 1971) ; it is then tempting to assume that the pulsar is responsible for all the kinetic energy and the ejection of matter ; however, the expansion velocities at the time of optical maximum would not be much more than 2.10^3 km/s, instead of the observed 1 to 2.10^4 km/s ; furthermore, the shock-wave produced by the pulsar would release a heat power of $27/112\ L_i$, in a quasi-stationary stellar envelope, instead of only $L_i/66$ in a homologously expanding SN envelope and it would become difficult to reproduce the rapide rise of the light curve. Consequently, we prefer a more conventional model in which the ejection of matter is due to an explosive event, like the thermonuclear explosion described by Colgate and White (1966) ; if the pre-supernova is an ordinary star, with radius less than a few A.U., there is no difficulty in explaining the high expansion velocities.

Next, as we have already noted, the problem of adiabatic losses from the expansion can be solved only by assuming a continuous energy input (pulsar) or by assuming an initial pre-supernova radius comparable to the radius at time of optical maximum, i.e. 10^{10} km or more ; but if the initial radius is that large, the calculated expansion velocities will again be too low (Falk and Arnett, 1973). This seems to rule out the models which involve such a giant circumstellar shell around the pre-supernova.

It is worth noticing that, in the "strong" pulsar model (Bodenheimer and Ostriker, 1974), that is a model in which the shock wave reaches the outer regions of the envelope and nearly all the kine-

tic energy W comes from the pulsar, it is still necessary to assume a giant envelope ($\gtrsim 10^{10}$ km) for the pre-supernova, otherwise the luminosity peak is far too narrow.

The situation looks better in a "weak" pulsar model, where the pulsar acts only as a heating source ; the light curves would be similar to that calculated by Colgate and McKee for type I supernovae ; the rise-time before maximum would still be too large.

In our model the rise-time is well reproduced and also the shape of the light curve as long as the luminosity has not dropped by more than 4 magnitudes below maximum. The presence of a (diluted) nearly black-body continuum is explained and the time evolution of the colour temperature is well reproduced, in particular the rapid decrease down to 5.10^3K after maximum.

We have found light curves very similar to the typical ones, starting from quite conventional values of the 3 parameters (total mass, total energy, peak luminosity). Finally, the model predicts a very weak dependence of the radius at maximum luminosity, as a function of the 3 parameters ; our standard value is : $R_o \simeq 5.10^{10}$ km.

APPENDIX : Solution of the diffusion equations.

1) Elementary solutions n_T, n_c, n_H for a finite spherical shell ($a < r < R_o$).

Let's recall the diffusion equations (1.20) :

$$\begin{cases} 4\,\dfrac{\partial n}{\partial \Omega} = \Delta n \\ \Omega = 4 \displaystyle\int_{t'}^{t} D(t_1)\,dt_1 \end{cases} \qquad (A.1)$$

We look for the elementary solutions n_T, n_c, n_H with boundary conditions (1.23) :

$$\begin{cases} n_T(a) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial n_c}{\partial r}\right|_a = 0 \\ \left.\dfrac{\partial n_H}{\partial r}\right|_a = \dfrac{4a}{3} \cdot \dfrac{\partial n_H(a,\Omega)}{\partial \Omega} \end{cases} \qquad (A.2)$$

The diffusion equation (A.1) has the form of a Schrödinger equation in a vacuum ; the solution can therefore be developed in the form :

$$n = \sum_{p,\ell} e^{-k_p^2 \Omega/4} \left[a_p\, j_\ell(k_p r) + b_p\, n_\ell(k_p r) \right] \qquad (A.3)$$

where the j_ℓ and n_ℓ are the (regular and irregular) spherical Bessel functions. However, we are interested only in a spherically symmetrical

solution, so that we have to keep only the terms $l = 0$; furthermore, there is a boundary condition $n(R_o) = 0$, and eq. (A.3) may be written as :

$$n = \frac{1}{r} \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \, e^{-\frac{\alpha_p^2 \, \Omega}{4(R_o-a)^2}} \cdot \sin\left(\frac{\alpha_p (R_o - r)}{(R_o - a)}\right) \qquad (A.4)$$

The coefficients α_p^T, α_p^c, α_p^H are defined by the boundary conditions (A.2) (each term of the sum has to fulfill this boundary condition). We find :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha_p^T = 0, \text{ or : } \alpha_p^T = p\pi \\ \dfrac{\operatorname{tg} \alpha_p^c}{\alpha_p^c} = \dfrac{-1}{\left(\dfrac{R_o}{a} - 1\right)} \\ \dfrac{\operatorname{tg} \alpha_p^H}{\alpha_p^H} = \dfrac{-1}{\left(\dfrac{R_o}{a} - 1\right)\left[1 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\alpha_p^H}{\dfrac{R_o}{a} - 1}\right)^2\right]} \end{cases} \qquad (A.5)$$

The coefficients a_p in eq. (A.4) are then determined by the form of the complete solution n at any given "initial" epoch, for example $\Omega = 0$. For all types of solution, the Bessel functions $f_p \equiv \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\alpha_p (R_o - r)}{(R_o - a)}\right)$ are members of a set of orthogonal functions with orthogonality condition :

$$\int_o^{R_o} f_p \, f_q \, r^2 \, dr = 0 \qquad (A.6)$$

(the functions f_p^T and f_p^c take the value zero for $r < a$, and the functions f_p^H are constants : $f_p^H(r < a) = f_p^H(a)$.

It is then easy to find the coefficient a_p of the development of $n(r, \Omega = 0)$; the general form is :

$$a_p = \frac{\int_o^{R_o} n(r, \Omega = 0)\ f_p\ r^2\ dr}{\int_o^{R_o} f_p^2\ r^2\ dr} \qquad (A.7)$$

Assuming emission of one particle at $r = a$ and $\Omega = 0$, the initial solutions $n(r, \Omega = 0)$ are respectively :

$$\begin{cases} n_T(r, \Omega = 0) = \dfrac{-2\lambda(t')}{3\pi a^2}\ \delta'(r-a) \\ n_c(r, \Omega = 0) = \dfrac{\delta(r-a)}{4\pi a^2} \\ n_H(r, \Omega = 0) = \dfrac{3.Y(a-r)}{4\pi a^3} \end{cases} \qquad (A.8)$$

where $Y(x)$ is the Heaviside's function, defined by $Y(x < 0) = 0$ and $Y(x > 0) = 1$; $\lambda(t')$ is the initial mean free path for scattering.

We get finally :

$$\begin{cases} 4\pi\ a^2\ a_p^T = \dfrac{8\pi}{3}\ \dfrac{\lambda(t')}{a}\ \dfrac{p}{\left(\frac{R_o}{a}-1\right)^2} \\ 4\pi\ a^2\ a_p^c = \dfrac{-2\ \sin^2 \alpha_p}{\cos(\alpha_p)\ (\alpha_p - \sin \alpha_p \cos \alpha_p)} \\ 4\pi\ a^2\ a_p^H = \dfrac{\sin \alpha_p}{\dfrac{\sin^2 \alpha_p}{3} + \dfrac{(\alpha_p - \sin \alpha_p \cos \alpha_p)}{2\alpha_p}\left(\dfrac{R_o}{a} - 1\right)} \end{cases} \qquad (A.9)$$

The elementary solutions n_T, n_c, n_H are completely determined by eq. (A.4), (A.5) and (A.9).

For the case of function n_T, there is another way to develop the solution ; we start from the solution for an infinite medium ($R_o \to \infty$), which is :

$$n_T^{(\infty)} \sim \frac{1}{r\,\Omega^{3/2}}\,(r-a)\,e^{-\frac{(r-a)^2}{\Omega}}$$

For the finite case, this does not satisfy boundary condition $n(R_o) = 0$, but it can be done by adding the contribution of the images of the source ($r = a$) in the mirrors $r = a$ and $r = R_o$; the radius r_n of the n^{th} image is :

$$r_n = a + 2n\,(R_o - a)$$

and the corresponding solution of the diffusion equation (A.1) is :

$$\frac{1}{r\,\Omega^{3/2}}\,(r-r_n)\,e^{-(r-r_n)^2/\Omega}$$

It can be seen easily that the following sum :

$$n_T = \frac{4\lambda(t')}{3\,a\,r}\cdot\frac{1}{(\pi\,\Omega)^{3/2}}\sum_{-\infty}^{+\infty}(r-r_n)\,e^{-(r-r_n)^2/\Omega} \qquad (A.10)$$

fulfills the boundary conditions $n_T = 0$ at $r = a$ and R_o, and is therefore the elementary solution n_T defined in the text.

This formula (A.10) is useful, since expansion (A.4) becomes slowly converging when $\Omega \to 0$; the series (A.10) is, on the contrary, exponentially converging.

2) <u>Functions n_T, n_C, n_H for an infinite shell</u> ($R_o \to \infty$).

The function n_T for the infinite case is trivial and has already been given :

$$n_T^{(\infty)} = \frac{4\lambda(t')}{3\,a}\,\frac{1}{(\pi\,\Omega)^{3/2}}\left(1-\frac{a}{r}\right)e^{-(r-a)^2/\Omega} \qquad (A.11)$$

It is possible to find functions $n_c^{(\infty)}$ and $n_{II}^{(\infty)}$ from the development (A.4) by letting R_o go to infinity ; the relevant terms then correspond to infinite values of p ; introducing the variable $v = \frac{P\pi}{2} \frac{\sqrt{\Omega}}{(R_o - a)}$ and the parameter $\beta = \frac{\sqrt{\Omega}}{2a}$, the series (A.4) reduces to an integral :

$$\begin{cases} r\, n_c^{(\infty)} = \dfrac{1}{2\pi^2 a^2} \displaystyle\int_o^{+\infty} \left[\sin(2v\sqrt{z}) + \frac{v}{\beta}\cos(2v\sqrt{z})\right] \frac{e^{-v^2}\, v\, dv}{(v^2 + \beta^2)} \\ r\, n_H^{(\infty)} = \dfrac{1}{2\pi^2 a^2} \displaystyle\int_o^{+\infty} \frac{\left[3\beta v \cos(2v\sqrt{z}) + (3\beta^2 - v^2)\sin(2v\sqrt{z})\right] e^{-v^2}\, 3v\, dv}{(v^4 + 3\beta^2 v^2 + 9\beta^4)} \end{cases} \qquad (A.12)$$

These integrals can be evaluated in terms of the function $U(\alpha)$:

$$U(\alpha) \equiv \alpha \int_o^{+\infty} \frac{e^{-u^2}\, du}{u^2 + \alpha^2} \qquad (A.13)$$

and we get finally :

$$\begin{cases} r\, n_c^{(\infty)} = \dfrac{e^{-\frac{(r-a)^2}{\Omega}}}{2\pi^2 a^2} \cdot \left[\sqrt{\pi}\, \frac{a}{\sqrt{\Omega}} - U\left(\frac{r-a}{\sqrt{\Omega}} + \frac{\sqrt{\Omega}}{2a}\right)\right] \\ r\, n_H^{(\infty)} = \dfrac{3\, e^{-\frac{(r-a)^2}{\Omega}}}{2\pi^2 a^2} \left\{ e^{i\pi/3}\, U\left(\frac{r-a}{\sqrt{\Omega}} + \frac{\sqrt{3\Omega}}{2a}\, e^{-i\pi/6}\right) + \text{complex conjugate} \right\} \end{cases} \qquad (A.14)$$

FIGURE CAPTIONS

Fig. 1 Schematic picture of a SN : R_o is the envelope radius, R_1 the cavity radius, R_s the shock radius. The thickness $R_s - R_1$ has been increased many times to become visible on the picture.

Fig. 2 Function X(m), from eq. (1.7) and (1.8) ; m depends on the physical parameters (total mass, expansion velocity, pulsar power L_i, etc) as shown in eq. (1.38) ; X defines the time $t_L = X \tau_c$ at which all the electromagnetic energy stored in the cavity has been absorbed and changed into heat.

Fig. 3 Thermal energy of cavity, versus reduced time $\theta = t/t_L$, for several values of the dimensionless parameter m.
All curves are normalized to 1 at time t_L.

Fig. 4 Temperature of cavity, versus reduced time $\theta = t/t_L$, for several values of m. We used the value $T_L = 1.2.10^4$ K.

Fig. 5 Radiative conduction flux at the cavity radius, versus θ.

Fig. 6 More realistic calculation of the cavity temperature $T_1(t)$ and o the electromagnetic energy $U_{EM}(t)$ in the cavity (see paragraph I. 1b) the abscissa is the reduced time $= t/\tau_c$, or the ordinary time in days. The dotted line is the temperature calculated by the "simple model" (paragraph I.1a), in which it is assumed tha the temperature remains constant up to time t_L.

The parameters are here : $L_i = 10^{43}$ ergs/s, $\Omega_i = 2.10^3$ s^{-1} $M_s = 2.5$ Mo, $\dot{R}_o = 10^4$ km/s.

Fig. 7 The ordinate gives the values of the "plateau" temperature T_L, versus the dimensionless parameter m ; the curves are labelled by the values of $\Omega_i/\dot{R}_1$ (km^{-1}) ; we see that m has nearly no influence on T_L, and that, for any reasonable value of $\Omega_i/\dot{R}_1$, $T_L = (1.2 \pm 0.1) \cdot 10^4$K..

Figs. 8-9 Light curves versus time, in dimensionless cordinates : $Y(t)/L_i$ and $\theta/\sqrt{x_c}$ (see eq. 1.42). The parameter $q \equiv R_o/R_1$ takes values 2. and 4. for fig. 8 and 9 respectively and the curves are labelled by the value of m.

Fig. 10 Light curves, versus time in days ; the curves are labelled by m, and $R_o/R_1 = 2$.

Fig. 11 Fits of the "typical" SN II and SN III light curves given by Shklovsky (1968) (dashed lines). The full lines are the calculated light curves with the following parameters :

. SN II : $R_o/R_1 = 3.$, $m = 0.47$

. SN III : $R_o/R_1 = 3.5$, $m = 0.60$

Fig. 12 This figure shows the infinite set of physical parameters corresponding to the parameters $m = 0.47$, $R_o/R_1 = 3.$ of our fit of SN II light curve. The abscissa is the kinetic energy $W/10^{51}$ ergs and the ordinate gives L_i, M_s, $\dot{R}_o$ and the time - integrated luminosity $\int Y\,dt$ in units of 10^{42} ergs/s, 1 Mo, 10^4 km/s and 10^{49} ergs respectively.

Fig. 13 Calculated spectra (full lines) and black-body spectra at the colour temperature T_c (dashed lines) for the parameters of our fit ($m = 0.47$, $R_o/R_1 = 3$) ; the curves are labelled by the time in days ($t_{max} = 44$ days).

Fig. 14 Colour temperatures T_c from the calculated B-V index, versus time in days, for our fits of SN II and SN III light curves (full lines) ; the cavity temperature T_1 is also plotted, for comparison (dashed lines).

REFERENCES

Aly, J.J., Caser, S., Ommes, R., Puget, J.L. and Valladas, G., 1974, Astron. and Astrophys.

Barbon, L., Ciatti, F. and Rosino, L., 1973, Astron. and Astrophys. 29, 57.

Bodenheimer, P. and Ostriker, J.P., 1974, Astrophys. J. 191, 465.

Chandrasekhar, S., 1953, Radiative transfer (IL Moscow).

Colgate, S.A. and McKee, C., 1969, Astrophys. J. 157, 625.

Colgate S.A. and White, R.H., 1966, Astrophys. J. 143, 626.

Falk, S.W. and Arnett, W.D., 1973, Astrophys. J. 180, L 65.

Friedjung, M. 1974, Astron. and Astrophys. 34, 419.

Gordon, C., 1973, Astron. and Astrophys., 29, 123.

Grasberg, E.K., Imshennik, V.S. and Nadyozhin, D.K., 1971, Astrophys. Space Sci., 10, 28.

Grasberg, E.K. and Nadezhin, D.K., 1970, Sov. Astron. AJ, 13, 585.

Hummer, 1968, in Planetary Nebulae, ed. D.E. Osterbrock, C.R. O'Dell, p. 166, New York, Springer.

Kaplan, S.A., Klimishin, I.A. and Sivers, V.N., 1960, Soviet. Astron. AJ. 4, 7.

Kaplan, S.A. and Sivers, V.N., 1961, Soviet Astron. AJ. 4, 776.

Kirshner, R.P., Oke, J.B., Penston, M.V. and Searle, L., 1973, Ap. J. 185, 303.

Kirshner, R.P., Willner, S.P., Becklin, E.E., Neugebauer, G. and Oke, J.B., 1973, Ap. J. 180, L 97.

Kompaneets, A.S., 1957, Soviet Phys., J.E.T.P., 4, 730.

Miller, J.S., 1975, Ann. Review of Astrophys., p. 331-358.

Monaghan, J.J., 1973, Astron. and Astrophys. 29, 383.

Oke, J.B. and Searle, L., 1975, Ann. Review of Astrophys., p. 315.

Ostriker, J.P. and Gunn, J.E., 1971, Ap. J. 164, L 95.

Peebles, P.J.E., 1971, Physical Cosmology, Princeton Univers. Press.

Rublev, S.V., 1961, Soviet Astron. AJ 4, 645.

Shklovsky, L.S., 1968, Supernovae, ed. Wiley Interscience, London.

Sobolev, V.V., 1943, Astron. Zhur 20, N° 5-6.

Sobolev, V.V., 1960, Soviet. Astron. AJ 4, 1.

Weymann, R., 1965, Phys. Fluids, 8, 2112.

Zeldovich, Ya. B. and Sunyaev, R.A., 1969, Astrophys. and Space Sci., 4, 301.

Zwicky, F., 1965, in Stellar Structure, p. 367, ed. L.H. Aller and D.B. McLaughlin, The University of Chicago Press, Chicago and London.

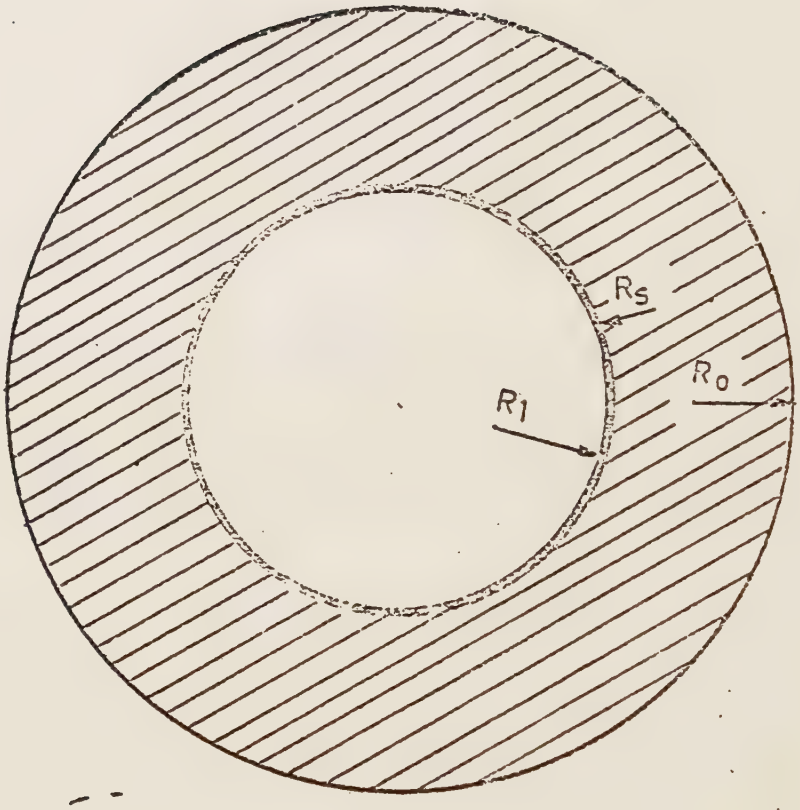


Fig 1

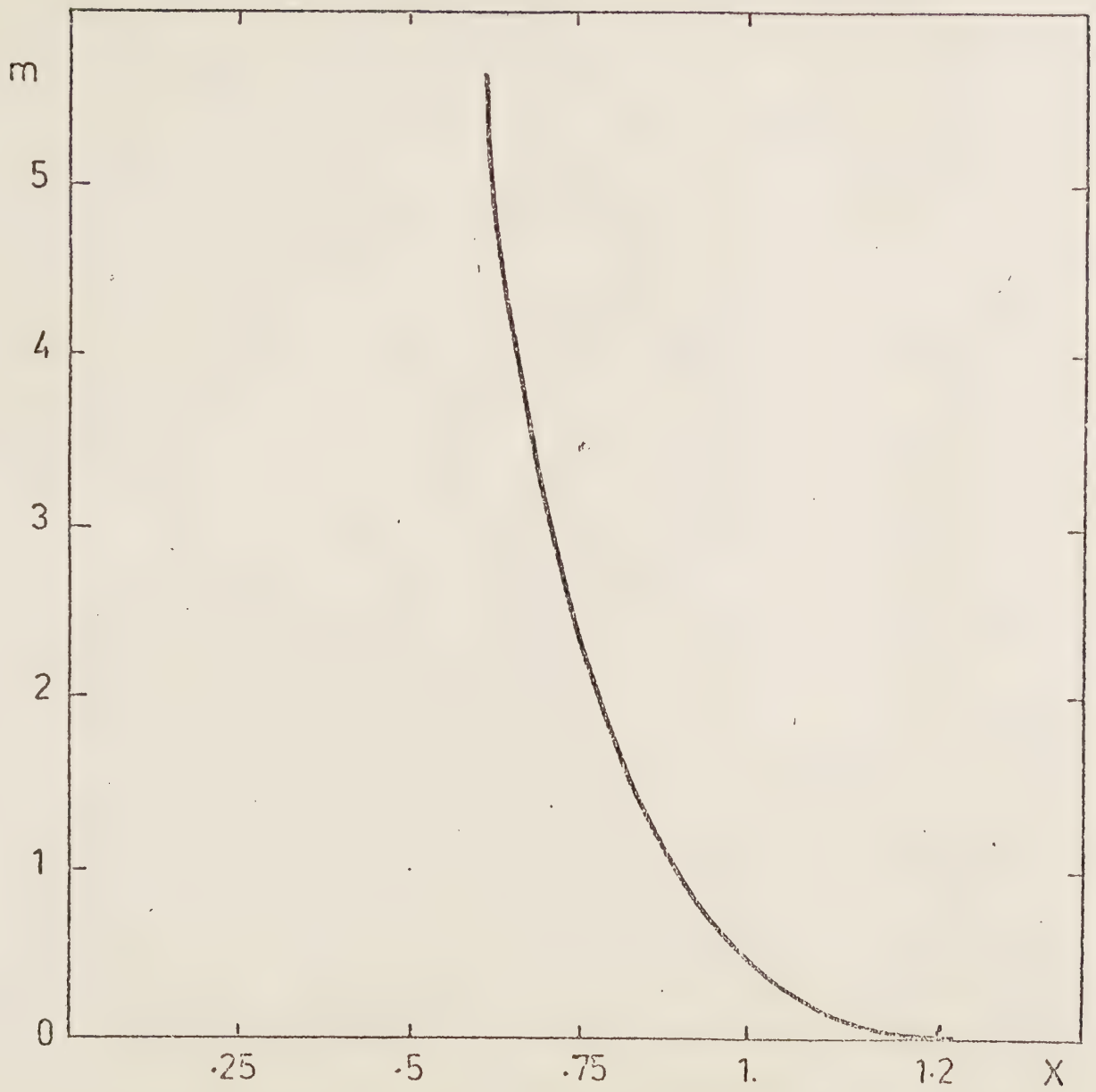


Fig - 2

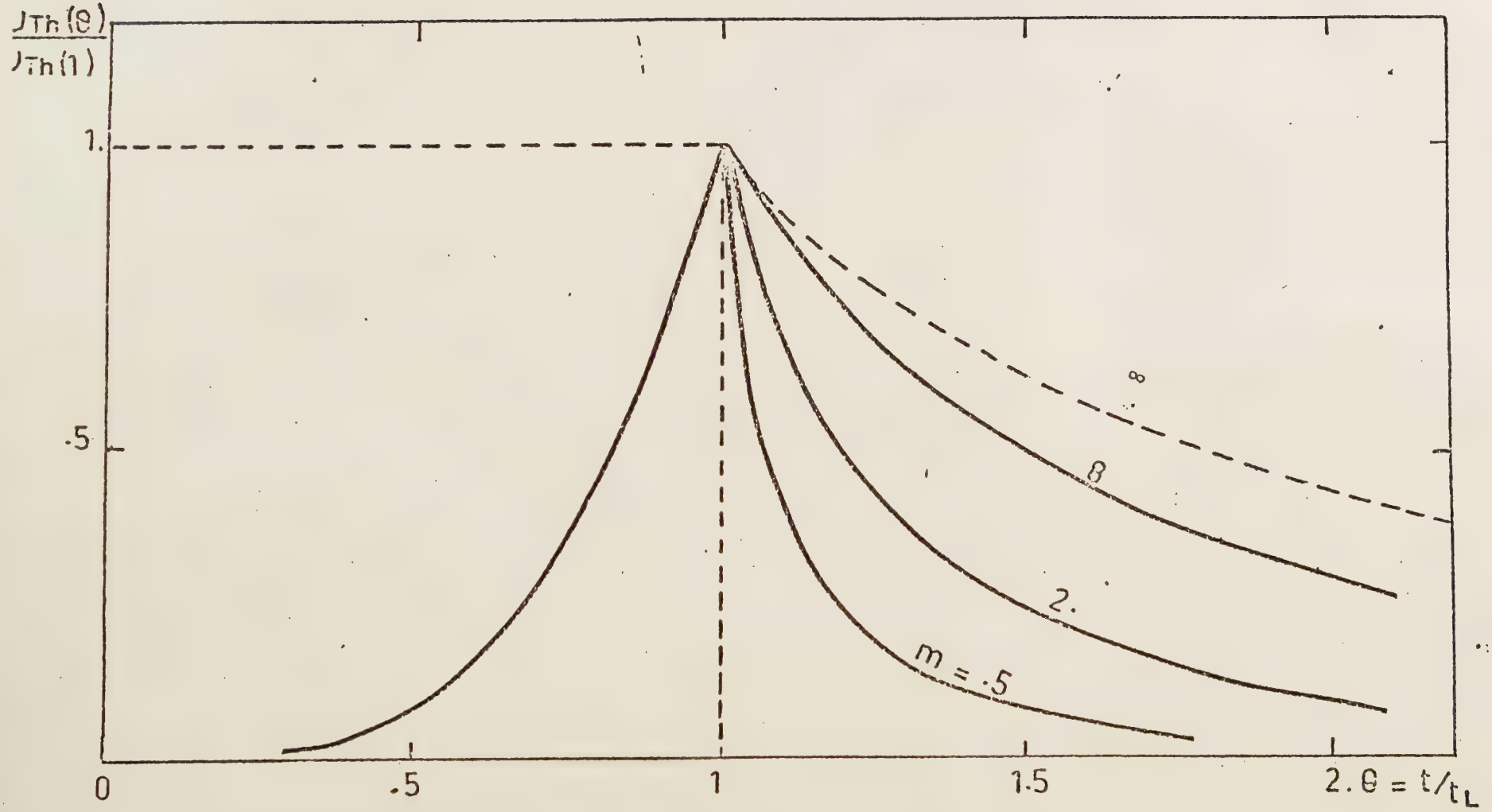


Fig-3

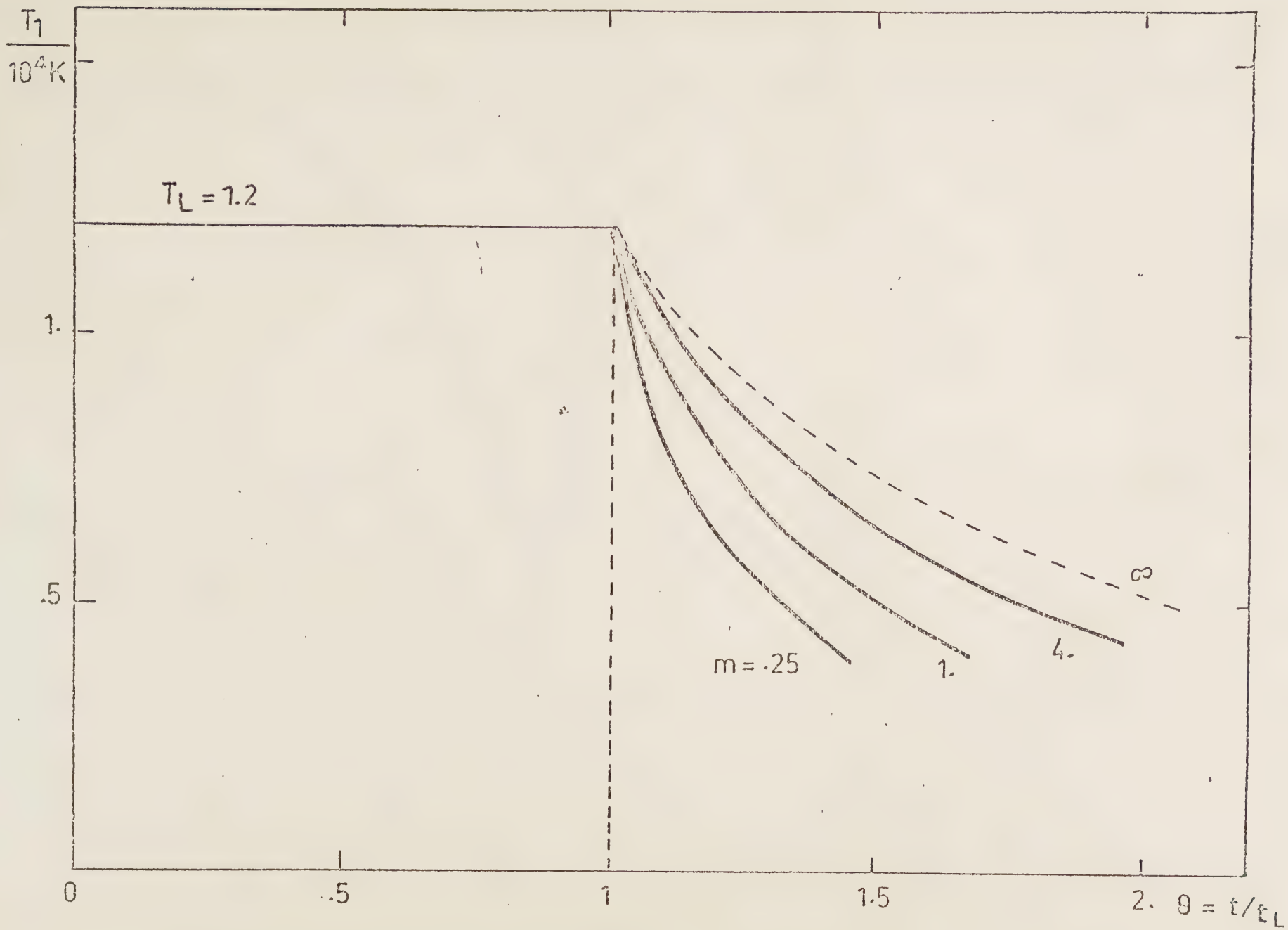


Fig -4

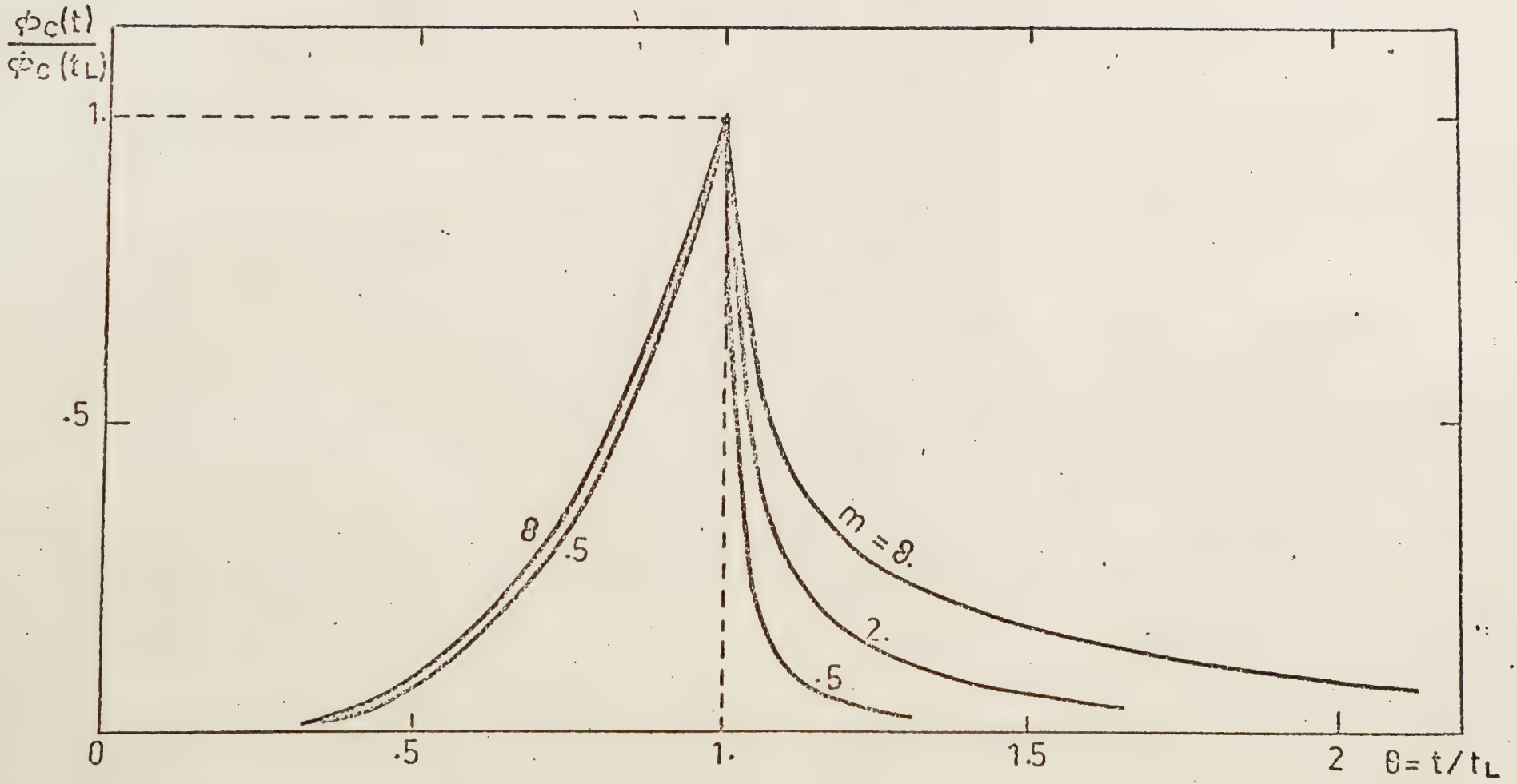


Fig-5

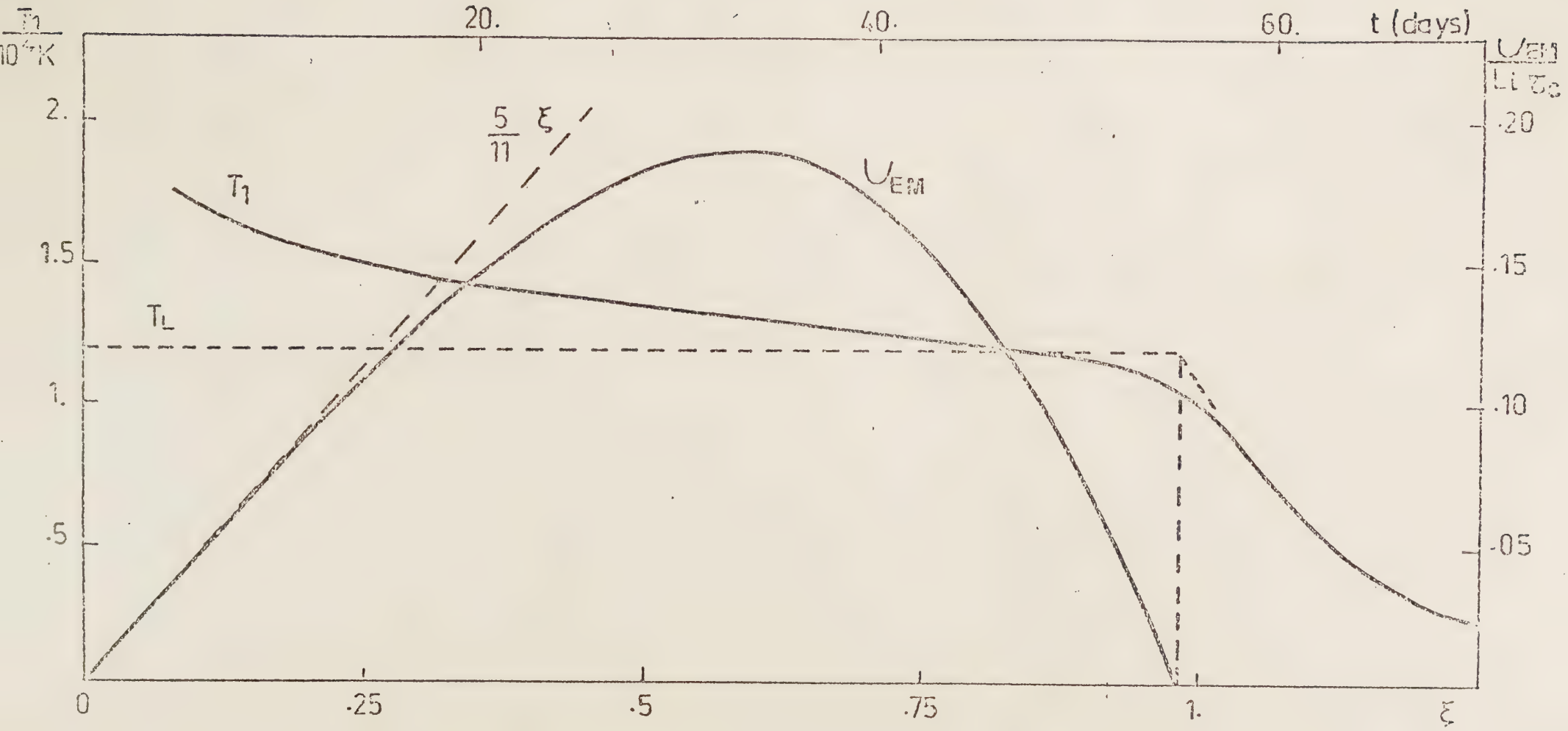

T_1 / 10^4K
20.
40.
60.
t (days)
U_{EM} / Li Σ_c
2.
1.5
1.
.5
.20
.15
.10
.05
$\frac{5}{11}\xi$
T_1
T_L
U_{EM}
0
.25
.5
.75
1.
ξ

Fig -6

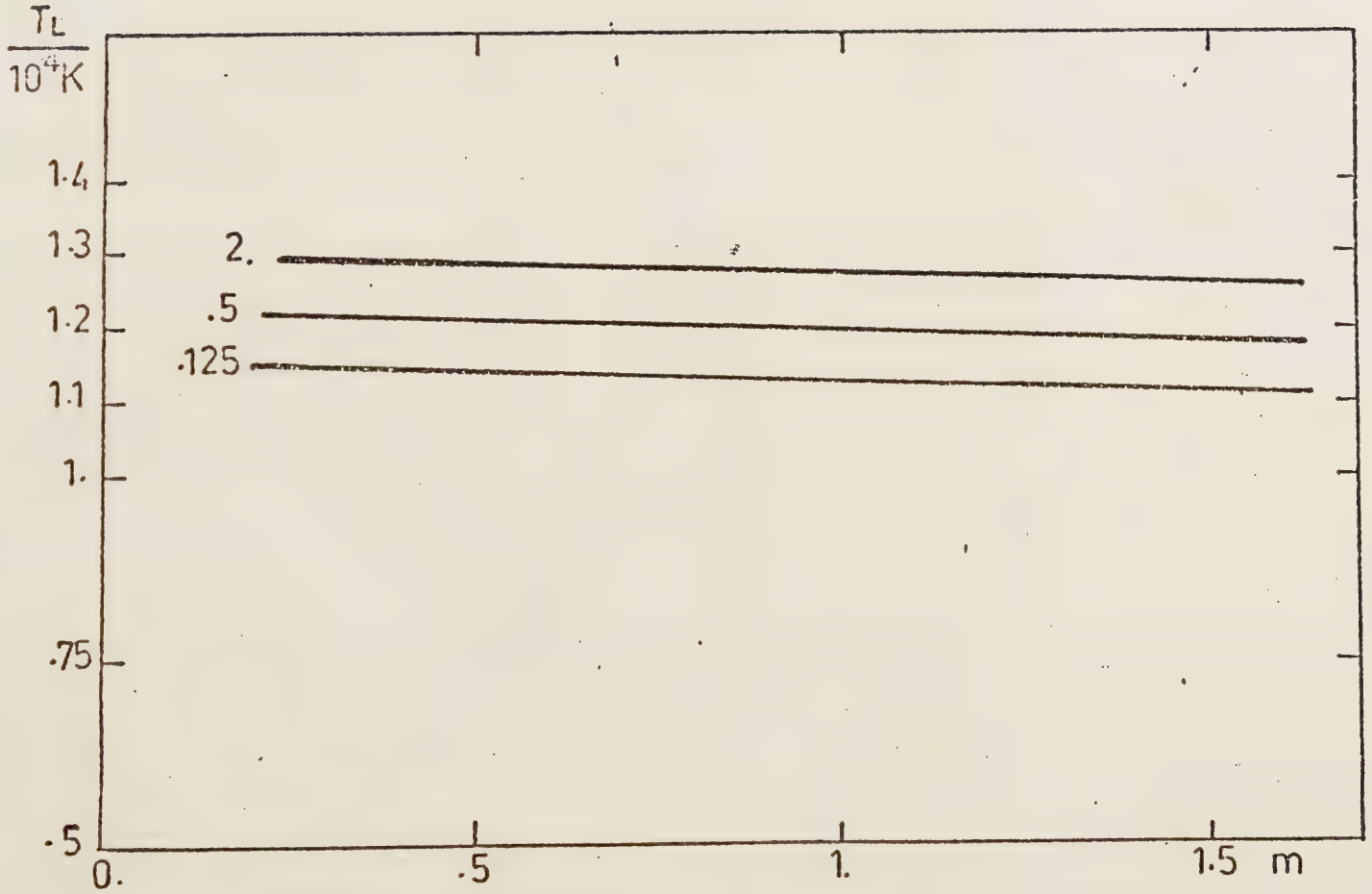


Fig - 7

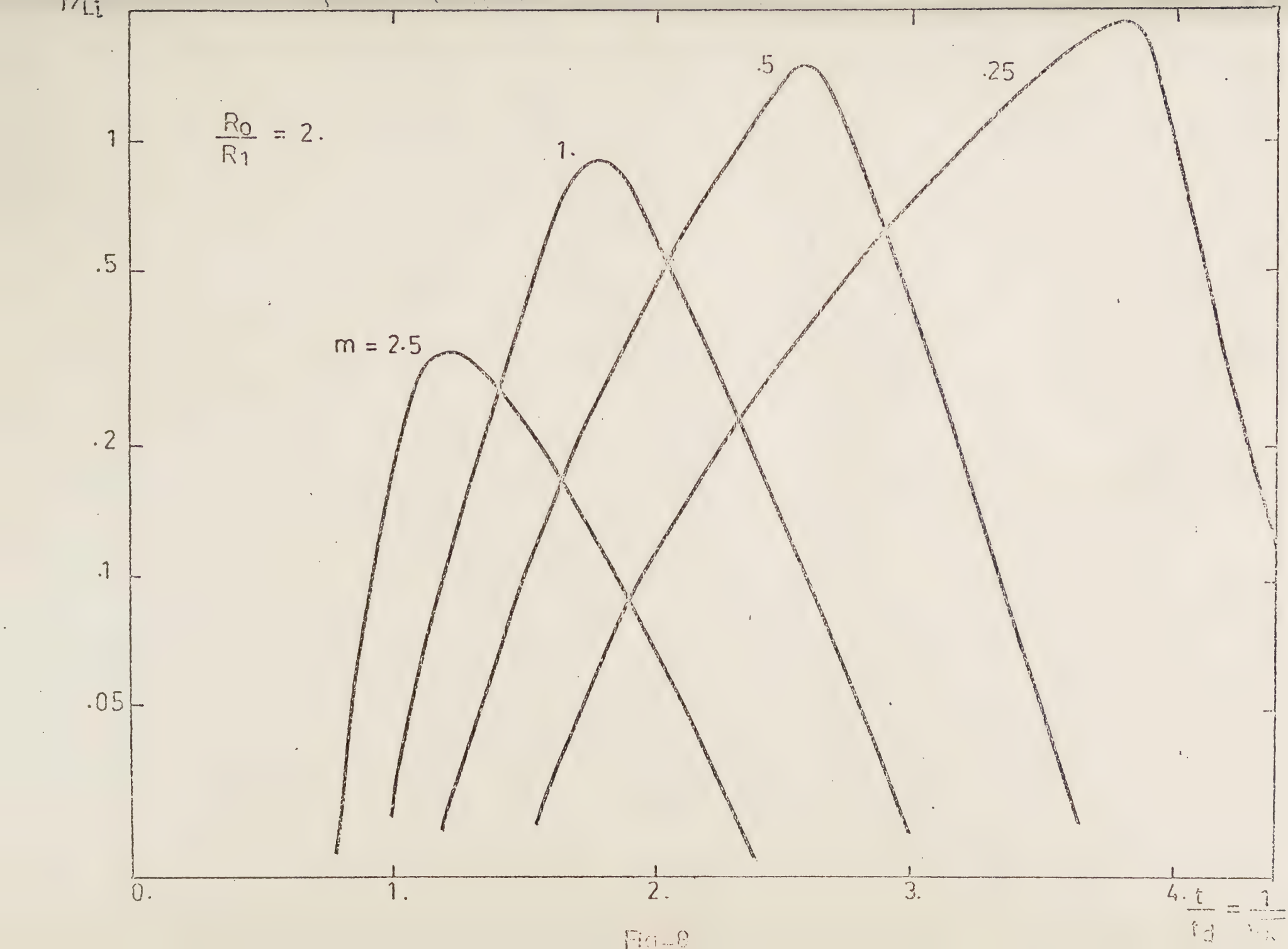
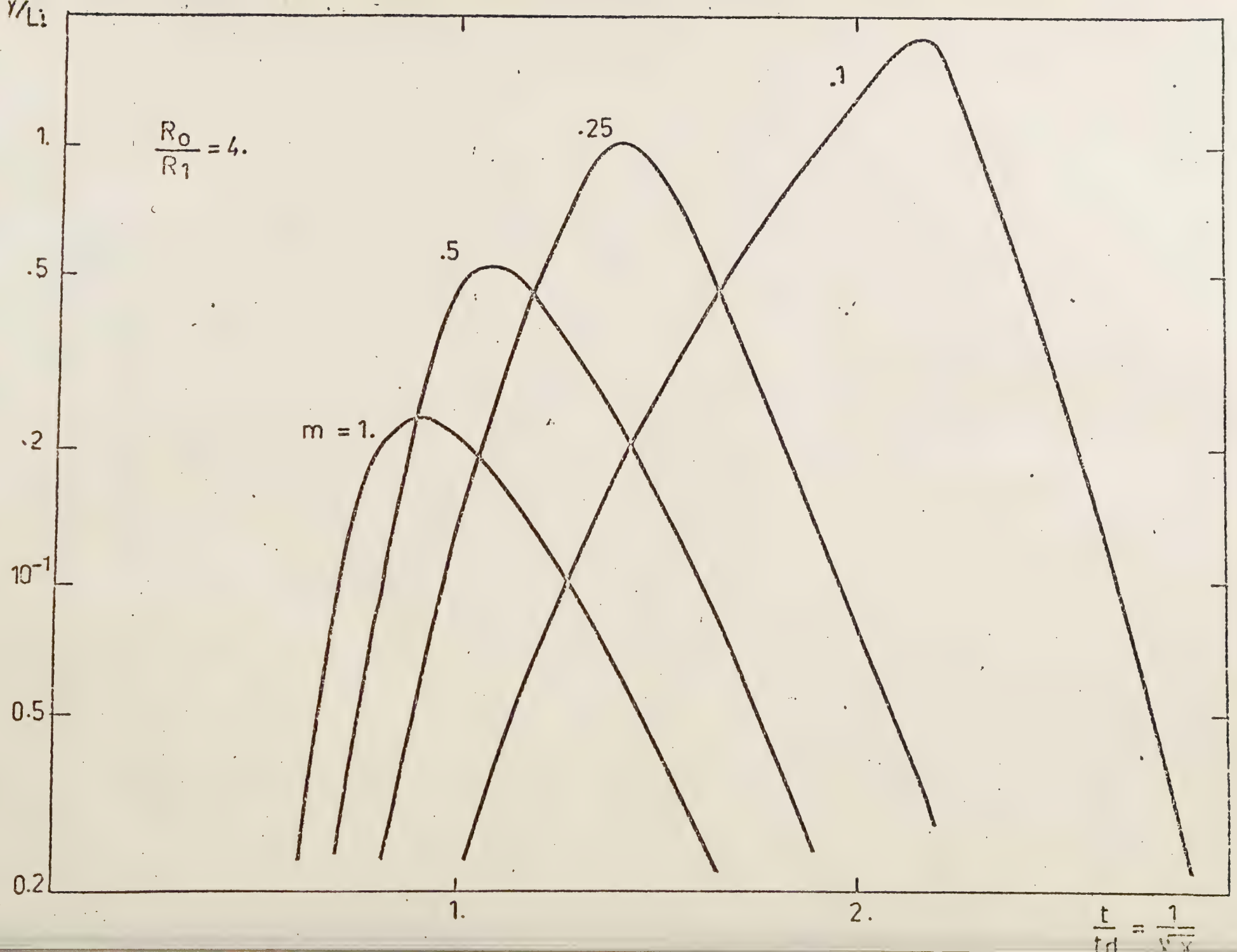


Fig-9


Y/Li
1.
.5
.2
10⁻¹
0.5
0.2
Ro/R1 = 4.
.1
.25
.5
m = 1.
1.
2.
t/td = 1/√x

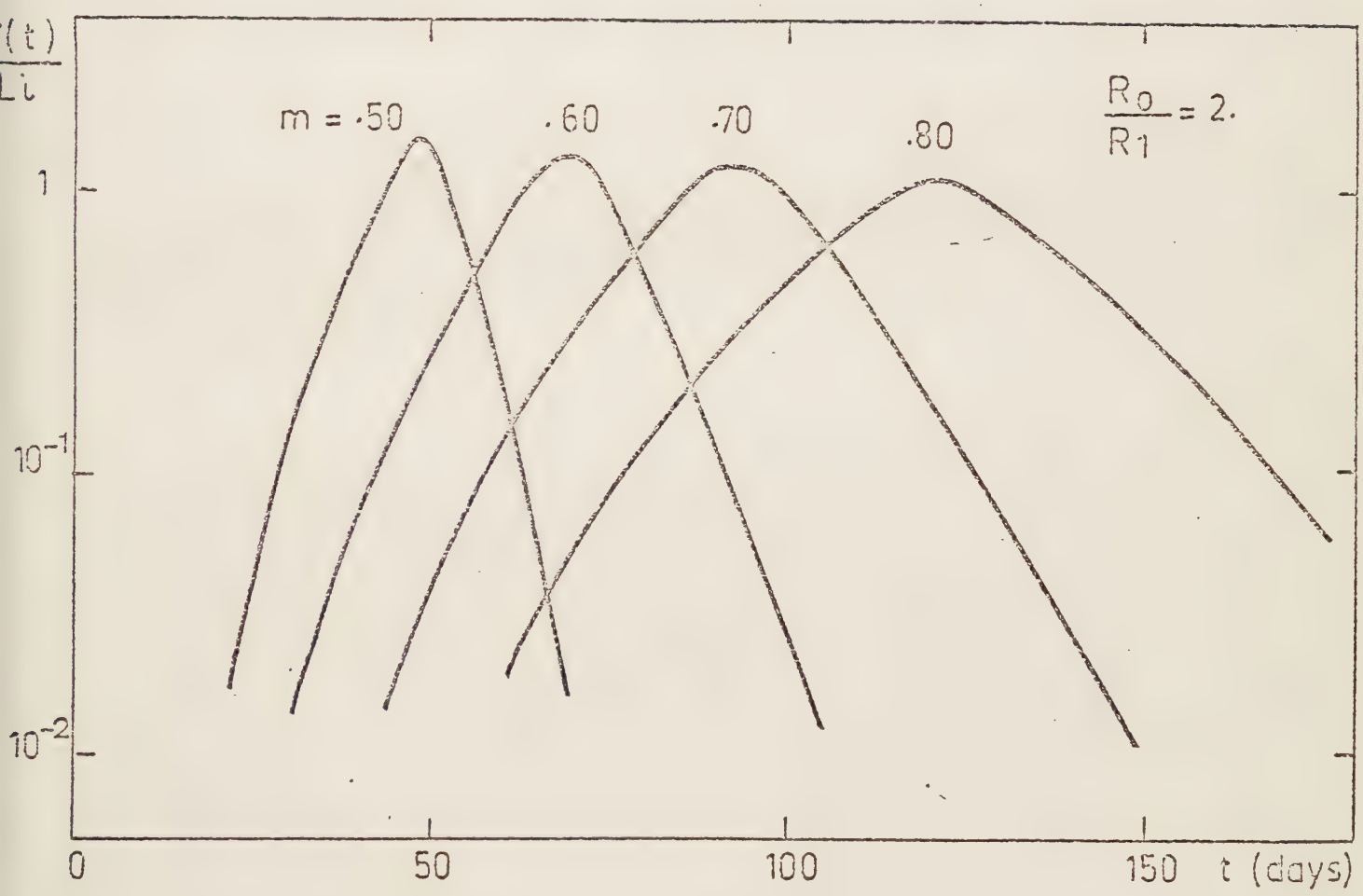


Fig – 10

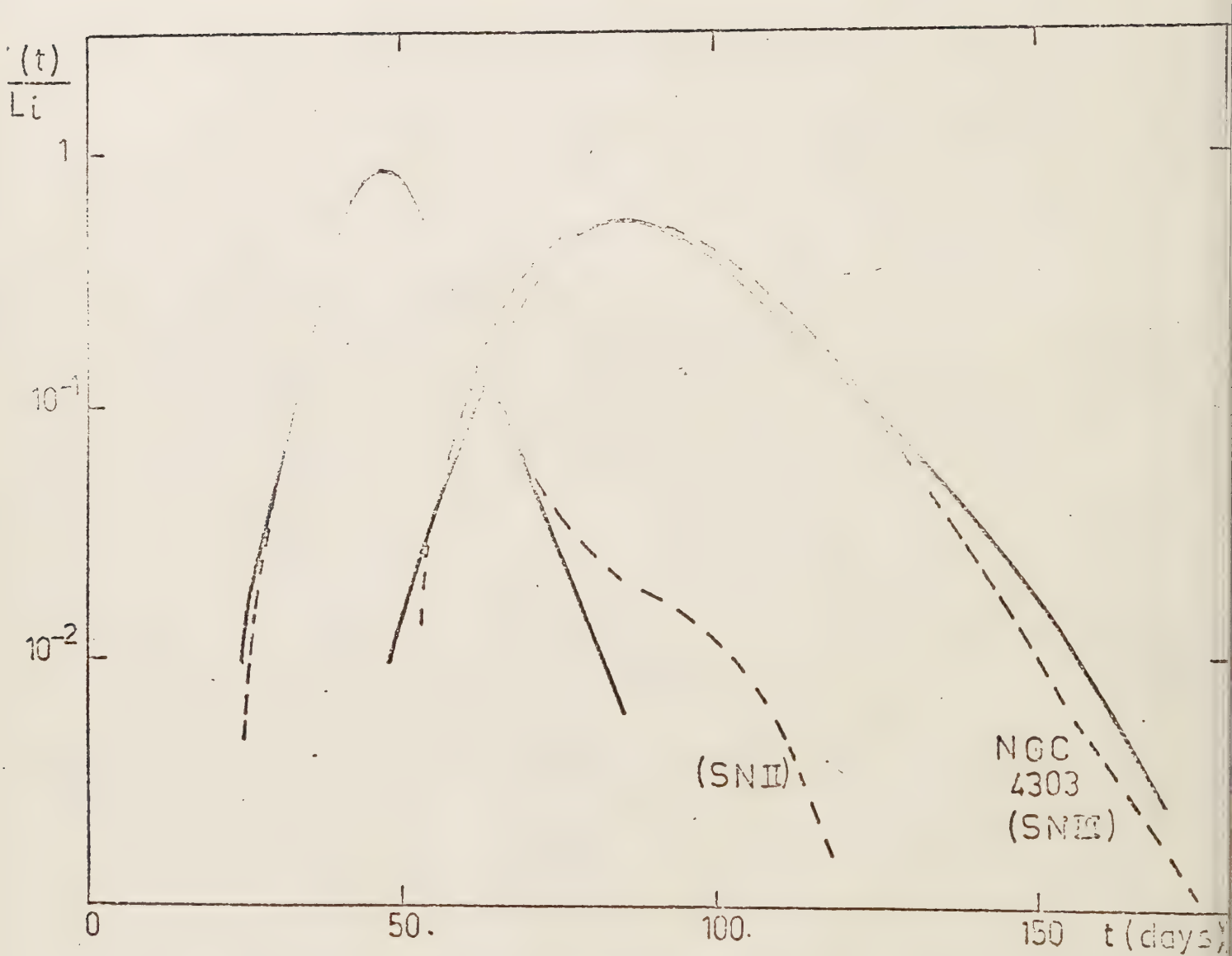


Fig - 11

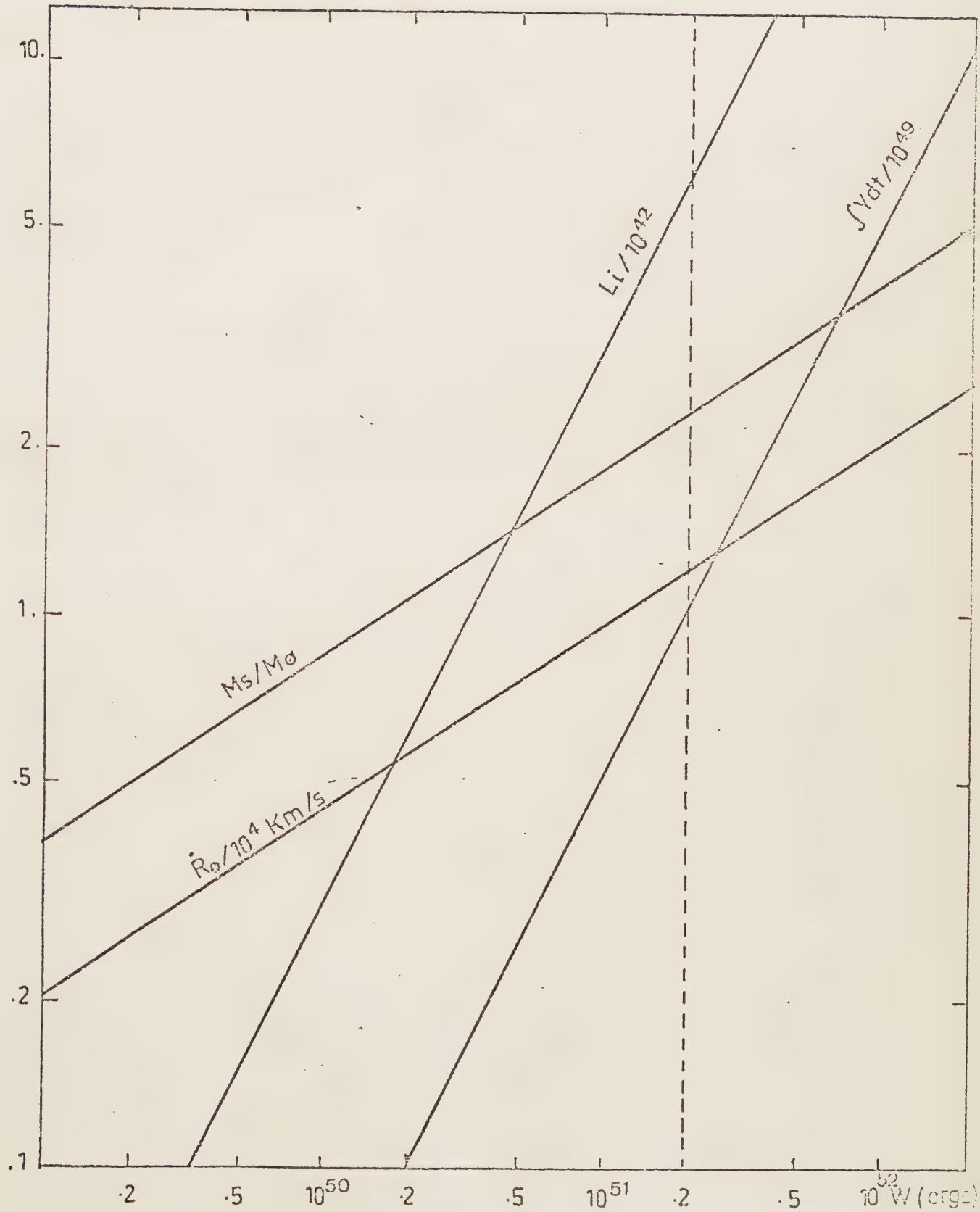

10.
5.
2.
1.
.5
.2
.1
Ms/Mo
Li/10^42
∫Ydt/10^49
Ro/10^4 Km/s
.2
.5
10^50
.2
.5
10^51
.2
.5
10^52 W (ergs)

Fig - 12

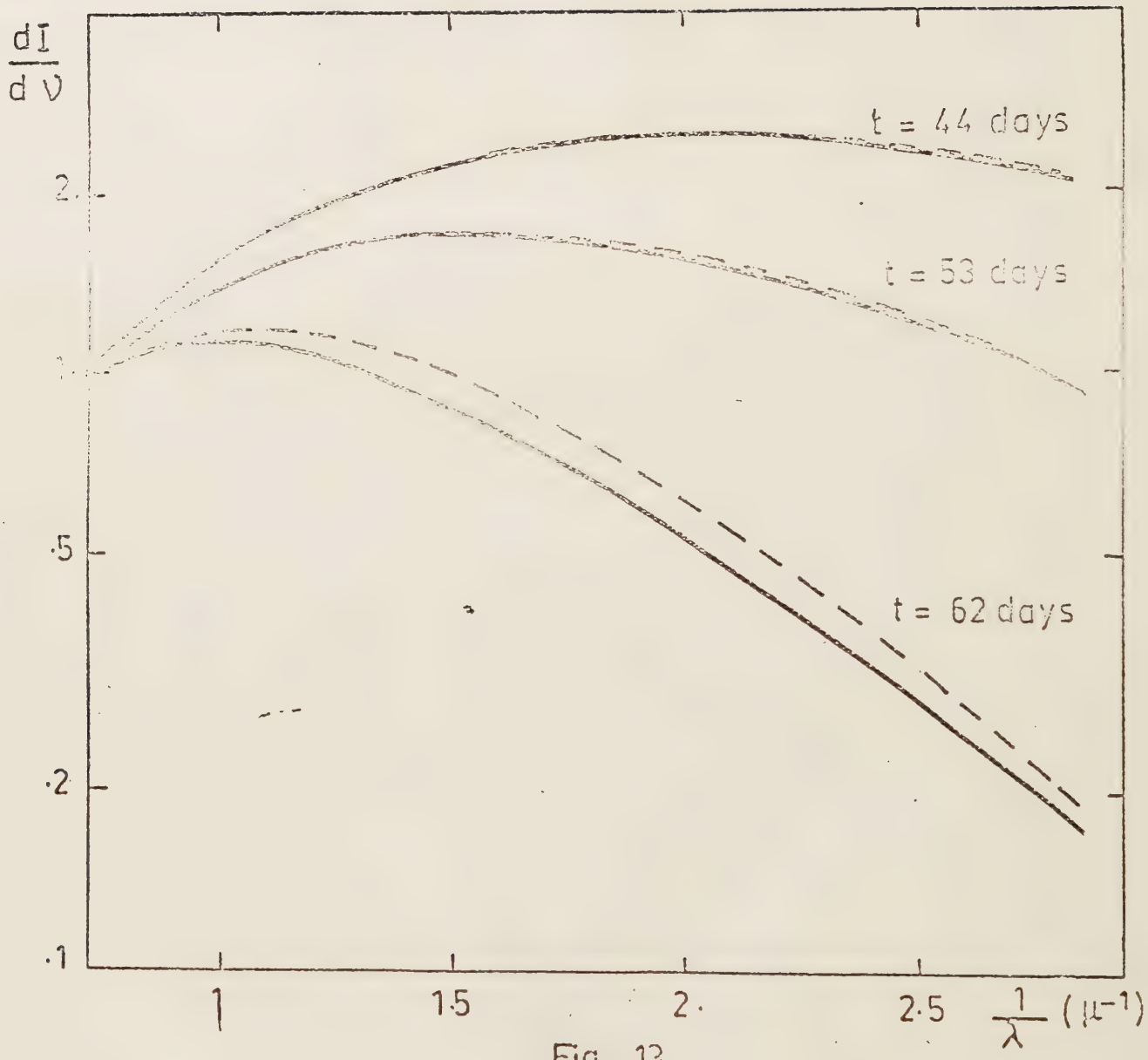


Fig - 13

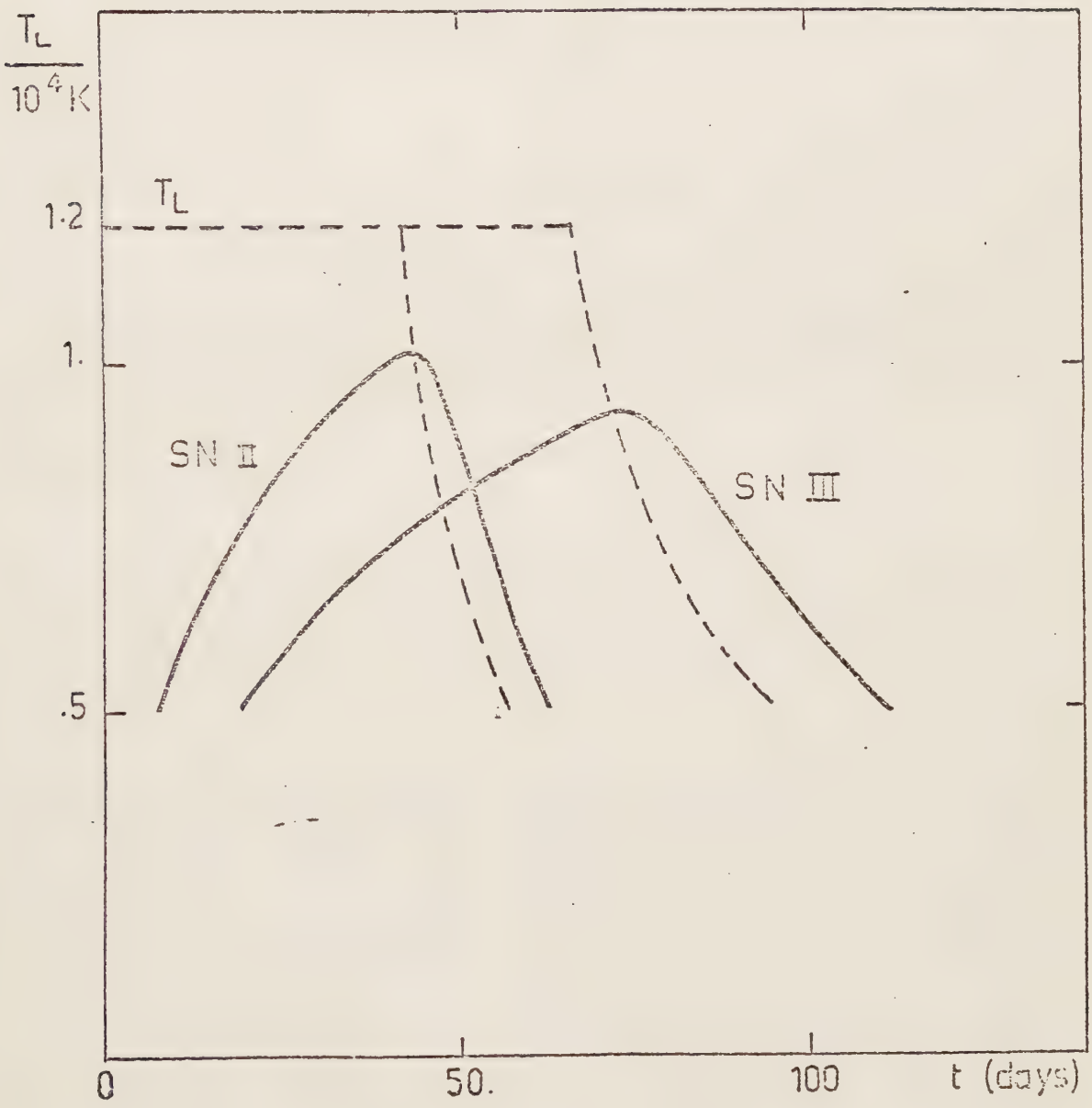


Fig 14

JOURNAL DE PHYSIQUE *Colloque C5, supplément au n° 11, Tome 36, Novembre 1975, page C5-145*

EXPLOSIONS ET COURBES DE LUMIÈRE DE SUPERNOVAE

B. GAFFET

DPh/EP/ES, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay,
91190 Gif-sur-Yvette, France

Résumé. — Les mécanismes responsables de l'explosion des supernovae restent actuellement assez mal connus. Plusieurs modèles sont en concurrence, parmi lesquels : l'explosion thermonucléaire simple ou précédée d'une phase d'implosion ; l'émission de neutrinos qui en résulte peut avoir un effet dynamique important, suivant que l'étoile leur est opaque ou transparente ; une autre théorie invoque la pression du rayonnement du pulsar qui se forme au centre de l'étoile.

A cette incertitude sur le mécanisme de l'explosion correspond une incertitude sur la source de luminosité de la supernova. La chaleur initiale due à l'explosion ne semble pas suffire ; d'autre part la luminosité peut résulter de la diffusion de la chaleur à travers la matière éjectée, ou être transportée plus rapidement par une onde de choc. Un modèle dans lequel la chaleur est produite par le pulsar semble compatible avec la plupart des observations (formes de la courbe de luminosité et du spectre continu, vitesses d'expansion, température et luminosité au pic, énergie cinétique totale.

Abstract. — The mechanisms responsible for the outburst of supernovae are still poorly known. Several models have been proposed, among which : thermonuclear explosion, alone or following an implosive phase ; the resulting neutrino emission may have large dynamical effects if the star is opaque to neutrinos ; another theory uses the pressure of the radiation from the pulsar which has just been formed at the center. The origin of the light from the supernova is also not precisely known. The initial heat released by the outburst does not seem sufficient ; furthermore, the heat may go throughout the supernova by diffusion alone, or it may go faster with a shock wave. A model in which the heat is produced by the pulsar seems compatible with most of the observations (shape of the light curve and of the continuous spectrum, expansion velocity, peak temperature and luminosity, total kinetic energy).

1. Introduction. — Les supernovae sont la dernière phase de l'évolution d'une étoile, phase explosive dans laquelle une partie notable ou même la totalité de la masse stellaire est dispersée dans l'espace, à des vitesses de l'ordre de 10^4 km/s. Elles se manifestent dans les semaines ou les mois qui suivent l'explosion par une luminosité optique exceptionnellement élevée : elles rayonnent en effet pendant ce temps la même énergie que le Soleil en 10^7 ou 10^8 ans ; ainsi, la supernova observée en 1054 en Chine (distance 1 kpc) restait visible à l'œil nu pendant la journée. D'autre part, la matière éjectée continue son expansion dans le gaz interstellaire et forme le *rémanent de supernova*, observable quelquefois en optique ou comme source X, mais surtout en radio. Enfin, on pense que l'explosion laisse généralement subsister un résidu stellaire compact, l'étoile à neutrons, observable en tant que pulsar.

Dans le cas de la Nébuleuse du Crabe, ces trois composantes du phénomène supernova sont ou ont été observées : l'intense luminosité au moment de l'explosion, la nébuleuse en expansion, et le pulsar au centre de cette nébuleuse.

Quel est le mécanisme d'explosion des S.N. ? Quelles sont les étoiles qui termineront leur évolution comme S.N. ? Ces deux problèmes sont évidemment liés.

Les S.N. ont aussi un grand rôle dans la nucléosynthèse, car elles éjectent dans le milieu interstellaire des masses considérables ayant subi des phases de fusion thermonucléaire avancées. Enfin, l'accélération du rayonnement cosmique leur est également attribuée, car le spectre radio de leurs rémanents est interprété par l'effet synchrotron et implique la présence d'électrons ultra-relativistes.

Toute théorie du mécanisme d'explosion des S.N., construite à partir de la théorie de l'évolution stellaire, doit donc pour être acceptable être compatible avec les autres aspects du phénomène S.N. : courbe de lumière, nucléosynthèse, et éventuellement, spectre et composition du rayonnement cosmique ; la théorie doit également expliquer la formation d'une étoile à neutrons, au moins dans certains cas.

Nous ne considérons ici que les théories du mécanisme d'explosion et de la courbe de lumière : en particulier, nous avons étudié l'hypothèse d'Ostriker [1] suivant laquelle le pulsar est la source de l'énergie rayonnée par la S.N. ; nous avons étudié [2] le processus d'absorption des ondes électromagnétiques du pulsar et les courbes de lumière que nous avons calculées semblent en très bon accord avec les observations. Un autre type de théorie, développée

par Grasberg *et al.* [3] et par Falk et Arnett [4] pour les S.N. II, conduit à des courbes de lumière conformes aux observations ; cependant, elle nécessite l'hypothèse arbitraire d'un rayon initial énorme (10^{10} km) avant l'explosion et prédit des vitesses d'éjection trop faibles précisément du fait de la valeur élevée du rayon initial.

2. Mécanismes d'explosion des supernovae. — Le problème de la détermination du mécanisme d'explosion est un problème d'évolution stellaire, particulièrement compliqué du fait des conditions hydrodynamiques extrêmes (chute libre, ondes de détonation, ondes de raréfaction) et du fait que l'émission de neutrinos y joue un rôle capital ; or, l'interaction faible est encore mal connue, malgré de nouveaux développements récents [5, 6], une autre source d'incertitudes réside dans le fait qu'une étoile, de masse initiale M_i lorsqu'elle était dans la phase *série principale*, peut éjecter dans diverses circonstances une quantité importante de matière, par exemple sous forme de nébuleuses planétaires : le calcul d'évolution à masse constante serait tout à fait faux dans ce cas. Enfin, les sections efficaces des réactions nucléaires de fusion ne sont pas toujours bien connues : en particulier, la réaction $C^{12} + \alpha \rightarrow O^{16} + \gamma$, qui intervient de façon cruciale pour déterminer la composition chimique (rapport C/O) du cœur de l'étoile après la fusion de l'hélium.

2.1 Quelques éléments d'évolution stellaire. — Le paramètre fondamental pour l'évolution d'une étoile est évidemment sa masse M ; les étoiles massives évoluent beaucoup plus rapidement, le temps de passage sur la *série principale* étant proportionnel à M^{-2} ($M < 10\ M_\odot$). Une étoile de masse suffisante passe successivement par les étapes de fusion de l'hydrogène, de l'hélium, du carbone, de l'oxygène, puis la photodésintégration du silicium qui produit les éléments du groupe du fer ; chacune de ces étapes a lieu à une température peu dépendante de la masse : de l'ordre de 2×10^7 K pour la fusion de H, 2×10^8 K pour la fusion de He, 9×10^8 K pour la fusion de C, etc... Le rayonnement sous forme de neutrinos devient important après la fusion de He. A la fin de la dernière phase de fusion, si la masse est encore supérieure à la limite de Chandrasekhar ($\sim 1{,}5\ M_\odot$), l'étoile doit imploser en formant un *trou noir* (singularité prévue par la Relativité Générale) ou éjecter brutalement toute la masse en excès, en devenant supernova. Si la masse initiale est inférieure à $1{,}5\ M_\odot$, l'évolution s'arrête à une certaine phase de fusion : en dessous de $0{,}1\ M_\odot$, la fusion de H n'a pas lieu ; au-delà de $0{,}9\ M_\odot$, la fusion de O peut avoir lieu. L'étoile devient finalement une naine blanche, qui a un rayon très petit et dont le gaz d'électrons est dégénéré.

Dans une phase de fusion donnée, on a vu que la température centrale est à peu près indépendante de M, et elle est d'autre part proportionnelle à GM/R d'après le théorème du viriel, pour un gaz parfait non dégénéré : la densité centrale est donc proportionnelle à M^{-2} ; les étoiles de faible masse doivent donc avoir un cœur dégénéré. La combustion de l'hélium a lieu en effet dans un cœur dégénéré pour $M < 2\ M_\odot$, et la combustion du carbone pour $M < 8\ M_\odot$. La question de la dégénérescence est capitale pour la théorie des S.N. : en effet, la forme de l'équation d'état d'un gaz dégénéré (pression quasi indépendante de la température) implique que l'allumage des réactions nucléaires se fasse de façon explosive, la température devant augmenter brutalement jusqu'à un niveau tel que la dégénérescence soit levée. En ce qui concerne la fusion de l'hélium, ce phénomène (appelé *flash de l'hélium*) n'a pas une grande ampleur ; on l'a souvent invoqué pour expliquer les éjections des nébuleuses planétaires. Dans le cas de la fusion du carbone, le gaz est beaucoup plus dégénéré et le résultat est une explosion catastrophique, capable de disperser toute la matière de l'étoile [7, 8, 9] comme nous le verrons plus loin.

Comme on l'a vu, les pertes de masse relativement *calmes* au cours de la vie d'une étoile peuvent être très importantes ; les études d'évolution stellaire (Paczynski *et al.*) [10] dans la phase de fusion de He pour $M < 4\ M_\odot$, ont montré en particulier que l'étoile devient pulsationnellement instable, et éjecte probablement toute la matière en excès de la masse de Chandrasekhar ; on pense donc généralement que toutes les étoiles de masse $M < 4\ M_\odot$ deviennent finalement naines blanches. Il reste donc deux groupes importants d'étoiles pouvant devenir supernovae : *a*) les étoiles de 4 à 8 $M_\odot$, qui sont dégénérées pendant la fusion de C : Paczynski (1970) [11] a montré que toutes ces étoiles ont un cœur ayant une structure commune : pour un cœur de masse 1,4 $M_\odot$, la température centrale est de 3×10^8 K et la densité de 2×10^9 g/cm^3 environ, ce cœur pourrait donner naissance à une étoile à neutrons ; *b*) les étoiles de 8 à 60 $M_\odot$ (les étoiles plus lourdes sont probablement instables par fragmentation) qui brûlent le carbone de façon non dégénérée ; le cœur de ce groupe d'étoiles a également une structure commune.

Le premier groupe (4 à 8 $M_\odot$) a été proposé par Gunn et Ostriker [12] sur la base de la coïncidence statistique entre le nombre de ces étoiles en fin d'évolution et le nombre de S.N.

Le 2e groupe (8 à 60 $M_\odot$) est proposé par Arnett *et al.* [13] qui indiquent que le nombre d'étoiles dans ce groupe est suffisant pour correspondre aux S.N. et suggèrent [14] que les étoiles du groupe précédent deviennent toutes naines blanches, grâce à l'éjection de matière.

La masse moyenne de ce groupe est : 14 $M_\odot$ (en nombre) ou 22 $M_\odot$ (par masse) [13].

2.2 Mécanismes d'explosion. — Dans le paragraphe précédent nous avons indiqué la séquence d'évolution d'une étoile jusqu'à l'étape de la formation du groupe du fer, par photodésintégration du

silicium. L'étape suivante est naturellement la photodésintégration du fer (Hoyle, 1946) [15]

$$Fe^{56} \rightarrow 13\ He^{+} + 4n\ .$$

Burbidge, Burbidge, Fowler et Hoyle (1957) [16] ont montré que vers 8×10^9 K, la dissociation du fer se produit brutalement, et, la réaction étant endothermique, une implosion se produit. On peut interpréter également ce résultat en remarquant que l'indice adiabatique devient inférieur à $\frac{4}{3}$ en présence de cette réaction endothermique, et l'étoile est donc dynamiquement instable. Fowler et Hoyle (1964) [17] expliquent alors l'éjection de matière par la combustion nucléaire des couches externes en contraction (principalement O^{16}).

Il faut noter que les pertes d'énergie du cœur par neutrinos sont très importantes dans cette phase et ont pour effet d'accélérer considérablement l'évolution; cependant, Fowler et Hoyle (1964) [17] ont montré que ces pertes à elles seules ne sont pas suffisantes pour conduire à une implosion : la contraction reste quasi hydrostatique tant que la dissociation du fer n'a pas lieu.

Ce qui précède permet de comprendre comment un phénomène catastrophique (l'implosion) risque de se produire, dans une étoile relativement massive ($M > 10\ M_\odot$); cependant, le mécanisme d'éjection de l'enveloppe reste incertain. Colgate et White (1966) [18] remarquent que l'implosion suivie de la formation d'une étoile à neutrons, produit une énergie énorme ($\sim 10^{53}$ ergs) sous forme de neutrinos, énergie bien supérieure à celle qui serait fournie par la fusion de l'oxygène ($\sim 10^{51}$ ergs); dans le domaine de densités qui intervient ici, le libre parcours des neutrinos est du même ordre que le rayon de l'enveloppe : les auteurs concluent donc que ce mécanisme permet d'éjecter l'enveloppe bien plus efficacement que l'explosion nucléaire seule; les vitesses d'éjection qu'ils calculent sont de l'ordre de celles qu'on observe dans les supernovae.

Ce scénario semble donc fournir un modèle cohérent pour les explosions de S.N., la pré-supernova ayant une masse d'au moins $10\ M_\odot$. L'efficacité de l'éjection de matière par les neutrinos a été mise en doute sérieusement par Arnett [19] et Wilson [20].

Cependant, les nouveaux développements de la théorie des interactions faibles, en particulier la mise en évidence de la diffusion cohérente des neutrinos par les noyaux, donnent plus de poids aux conclusions de Colgate et White (Arnett, 1974) [14].

Cependant, à la suite de l'étude d'Ostriker [12] et Paczynski [11] l'intérêt s'est porté sur le groupe des étoiles de 4 à 8 $M_\odot$; comme on l'a vu, le centre de ces étoiles est dégénéré dans la phase de fusion du carbone. Hoyle et Fowler (1960) [7] ont suggéré que ces étoiles sont instables et que la fusion du carbone doit avoir lieu de façon explosive, car la température n'a pas d'influence régulatrice sur la pression pour un gaz dégénéré. Des travaux ultérieurs ont montré sans ambiguïté que la fusion du carbone doit avoir lieu en effet de façon explosive, et la matière de l'étoile est complètement dispersée. Arnett (1969) [9] montre que les vitesses d'éjection (de l'ordre de 20 000 km/s) sont celles qu'on observe dans les S.N. et propose ce scénario pour les explosions de S.N., à la suite de Hoyle et Fowler (1960).

Ce modèle conduirait cependant à un enrichissement beaucoup trop grand de la Galaxie en éléments du groupe du fer [21] et en outre il n'explique pas l'existence d'étoiles à neutrons.

Colgate (1971) [22] a suggéré que les pertes par neutrinos au moment de la fusion du carbone sont suffisamment intenses pour créer une onde de raréfaction et entraîner l'implosion de la moitié de la masse de l'étoile. Ainsi une étoile à neutrons serait formée et le fer ne serait pas éjecté dans la Galaxie; mais Bruenn (1971) [23] conclut que ces pertes par neutrinos (résultant des captures électroniques) ne seraient suffisantes pour produire une implosion que dans le cas de la fusion de l'oxygène et propose ce mécanisme pour les explosions de S.N.

D'autre part la fusion du carbone dans les étoiles de 4 à 8 $M_\odot$ se produisant à une densité centrale d'environ 2×10^9 g/cm^3 [9], on est très proche de la contraction gravitationnelle. La densité centrale à laquelle commencerait la contraction a été évaluée par différents auteurs [24]; Barkat *et al.* (72) [24] indiquent : $\rho_{crit.} = (6 \pm 3).10^9$ g/cm^3 et Bruenn (72) $\rho_{crit.} \sim 1{,}5 \times 10^{10}$ g/cm^3; considérant les incertitudes, il n'est donc pas impossible que la contraction se produise en premier, ce qui conduirait à la formation d'une étoile à neutrons et à l'éjection de l'enveloppe par l'effet combiné des réactions thermonucléaires et de la pression des neutrinos, comme on l'a vu plus haut; mais les estimations de $\rho_{crit.}$ semble favoriser l'hypothèse suivant laquelle la détonation du carbone se produirait en premier lieu.

Enfin, Paczynski (1972) [26] semble résoudre le problème de la formation d'une étoile à neutrons en montrant que les pertes par neutrinos par le processus URCA sont très grandes dans le cœur de l'étoile du fait de la convection et croissent plus vite que les réactions thermonucléaires en fonction de la température; la fusion dégénérée du carbone serait ainsi stabilisée; mais Bruenn (1973) [27] a montré que ce processus URCA convectif conduit nécessairement à un chauffage du gaz d'électrons malgré l'énergie emportée par les neutrinos, et infirme le résultat de Paczynski.

En conclusion, l'incertitude la plus grande en ce qui concerne l'explosion des étoiles de 4 à 8 $M_\odot$ vient de la compétition entre la contraction gravitationnelle du cœur de carbone et oxygène, et son explosion. Pour les étoiles de masse supérieure, la situation semble plus claire. Dans tous les cas, les calculs d'éjection de masse sous l'effet des neutrinos semblent assez incertains.

3. Courbes de lumière. — Le calcul des courbes de lumière est intimement lié au calcul hydrodynamique de l'expansion de la matière éjectée ; en particulier, l'évolution adiabatique due à l'expansion a un rôle fondamental et a pour résultat de transformer rapidement toute la chaleur produite par l'explosion en énergie cinétique.

3.1 Aspect hydrodynamique. — Si le rayon initial R_i de la pré-supernova est petit par rapport au rayon atteint à l'instant considéré, presque toute l'énergie thermique a déjà été transformée en énergie cinétique : chaque élément de matière se déplace donc à vitesse uniforme ; d'autre part, puisque le rayon initial peut être négligé, l'équation horaire s'écrit simplement :

$$v = \frac{r}{t}$$

ce qui signifie que la distribution de vitesses est proportionnelle au rayon ; l'expansion est donc homothétique.

Ce modèle peut être modifié par l'inclusion d'un pulsar : la pression des ondes qu'il rayonne crée une cavité dans l'enveloppe éjectée, et a pour effet de faire propager une onde de choc à travers cette enveloppe. Si le pulsar est assez puissant, cette onde de choc balayera toute la masse éjectée qui sera alors concentrée en une couche sphérique mince. (Ostriker *et al.* [28], Bodenheimer and Ostriker [29].)

Dans l'hypothèse où le rayon initial R_i n'est pas négligeable ($R_i \gtrsim 10^{10}$ km, car les estimations du rayon d'une S.N. à l'époque du maximum optique donnent : $R_{max} \sim 1$ à 5×10^{10} km), l'onde de choc produite par l'explosion thermonucléaire progresse à travers l'étoile et finit par atteindre la surface ; les pertes adiabatiques ne sont alors pas très importantes, car le rayon total est resté voisin de R_i pendant ce temps ; lorsque l'onde de choc atteint la surface, la matière est concentrée, là encore, en une couche sphérique mince.

Il y a deux grandes difficultés dans les modèles comme celui-ci, qui expliquent le pic de luminosité par l'émergence d'une onde de choc : en effet les observations (C. Gordon [30]) montrent que la distribution des vitesses est loin d'être homogène, et semble incompatible avec une distribution de matière en couche mince ; en outre, pour une énergie cinétique W fixée, la vitesse d'expansion d'une couche mince est forcément très inférieure à celle correspondant à une distribution de densité plus réaliste, en r^{-n} par exemple ($n = 2$ à 7) ; pour des valeurs raisonnables de W, il est difficile de dépasser des vitesses d'expansion de 2 000 km/s, alors qu'on observe jusqu'à 20 000 km/s.

Remarquons que la même critique s'applique à un modèle tel que celui de Schramm et Arnett [14] pour l'éjection de l'enveloppe des étoiles massives ($> 10\ M_\odot$) par transfert de l'impulsion des neutrinos (et non de leur énergie, comme le suppose Colgate [18]) ; Arnett conclut en effet que le résultat est le mélange complet (par suite de l'instabilité de Rayleigh-Taylor) de l'enveloppe éjectée, qui se concentre probablement en une couche mince. En fait, les observations des distributions de vitesse dans les S.N. semblent indiquer fortement qu'elles résultent du passage d'une onde de choc à travers l'étoile à une époque où son rayon était encore assez faible pour que le choc soit adiabatique ; cela nécessite un rayon au plus de l'ordre de 10^8 km.

3.2 Courbes de lumière. — Il est apparu rapidement que la chaleur de l'explosion elle-même ne peut suffire à expliquer le rayonnement observé, qui se maintient pendant des mois et même des années, étant donné la rapidité des pertes adiabatiques de chaleur si la pré-supernova est relativement compacte ($R_i < 10^3$ km).

Si l'on admet la possibilité d'une pré-supernova entourée d'une enveloppe géante ($\sim 10^{10}$ km), il est possible d'obtenir des courbes de lumière en accord avec les observations (Grasberg [3], Falk et Arnett [4]). La luminosité augmente rapidement dans ce modèle, au moment de l'émergence de l'onde de choc ; la température de couleur peut atteindre alors 2 à 5×10^4 K ; le transport de chaleur a lieu ensuite par diffusion ; la luminosité diminue régulièrement pendant cette phase ; puis une onde de refroidissement se propage vers l'intérieur, produisant un plateau de la luminosité, avec une température de couleur de l'ordre de 6 000 K. Ce modèle est sujet à des critiques en ce qui concerne les vitesses d'expansion (voir plus haut).

Si l'on abandonne cette image, il faut donc une source de chaleur pour alimenter le rayonnement de la S.N. : Ostriker [28] a proposé que cette source soit le pulsar, qui rayonne en effet théoriquement une puissance suffisante ($\sim 10^{43}$ ergs/s) à l'époque de sa formation.

Les courbes de lumière qui résultent de cette hypothèse ont été calculées par Bodenheimer et Ostriker (1974) [29], et ne sont pas en accord satisfaisant avec les courbes de lumière de SN II qu'on observe typiquement, bien qu'elles puissent correspondre à certains cas particuliers (SN III : SN 93 dans NGC 4303 par exemple). En outre, ces auteurs se sont placés dans le cadre du modèle précédent, admettant un rayon initial très grand ($\sim 10^{10}$ km), et dans leur calcul le pic de luminosité résulte également de l'émergence de l'onde de choc à la surface.

Nous avons discuté [2] l'hypothèse implicite faite par Bodenheimer et Ostriker, de la transformation instantanée en chaleur de l'énergie électromagnétique rayonnée par le pulsar : nous avons calculé qu'elle ne peut avoir lieu que lorsque la température de la S. N. est devenue suffisamment basse ($\lesssim 1{,}5 \times 10^4$ K) et les courbes de lumière qui en résultent sont en bon accord avec les observations. La température de couleur au pic de luminosité ($1{,}0 \times 10^4$ K, d'après Kir-

shner) [31] et sa décroissance rapide jusqu'à environ 5×10^3 K sont également reproduites par ce modèle.

En conclusion, le modèle de Grasberg, Falk et Arnett reproduit bien la courbe de lumière mais conduit à des vitesses d'éjection trop faibles. Le modèle de pulsar semble pouvoir conduire à des résultats aussi bons, sans rencontrer les mêmes difficultés.

Conclusion. — Nous avons vu que le mécanisme d'explosion des S.N., et le domaine de masse de la pré-supernova, restent incertains. Les calculs d'évolution stellaire permettent de distinguer deux catégories possibles de pré-supernova : les étoiles entre 4 et 8 $M_\odot$, et les étoiles plus lourdes (8 à 60 $M_\odot$).

La théorie prévoit, pour le premier groupe, la dispersion complète de la matière de l'étoile dans le milieu interstellaire, et ceci produirait plus de fer qu'on en observe réellement ; cependant, la formation d'une étoile à neutrons, qui résoudrait ce problème, reste possible.

La théorie semble donner une description assez cohérente de l'explosion des étoiles du deuxième groupe ; il reste cependant à expliquer ce que deviennent les étoiles plus légères.

Une bonne compréhension des courbes de lumière permettrait de trancher plus aisément en imposant des contraintes sévères aux modèles, en particulier en ce qui concerne la distribution des vitesses et la masse éjectée. Ainsi, notre calcul reproduit les courbes de lumière observées avec des masses éjectées de l'ordre de 2 à 4 $M_\odot$; cependant, certaines S.N. (SN III) auraient des masses plus élevées, jusqu'à 20 $M_\odot$; en outre, C. Gordon [30] indique l'existence d'une cavité dont la limite correspond à la vitesse ~ 4 000 km/s ; ce qui correspond au rayon de la cavité que créerait un pulsar.

Bibliographie

[1] Ostriker, J. P. and Gunn, J. E., *Astrophys. J.* **164** (1971) L 95.
[2] Gaffet, B., *Pulsar theory of supernova light curves*, à paraître *Astrophys. J.* (1975).
[3] Grasberg, E. K., Imshennik, V. S. and Nadyozhin, D. K., *Astrophys. Space Sci.* **10** (1971) 28.
[4] Falk, S. W. and Arnett, W. D., *Astrophys. J.* **180** (1973) L 65.
[5] Hasert *et al.* (Aachen, Brussels, CERN, Ecole Polytechnique, Milan, Orsay, London (Collaboration) *Phys. Lett.* **46b** (1973) 138.
[6] Benvenuti *et al.* (Harvard, Pennsylvania, Wisconsin, NAL collaboration) *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 800.
[7] Hoyle, F. and Fowler, W. A., *Astrophys. J.* **132** (1960) 565.
[8] Rose, W. J., *Astrophys. J.* **155** (1969) 491.
[9] Arnett, W. D., *Astrophys. Space Sci.* **5** (1969) 180.
[10] Paczynski, B. E. and Ziolkowski, J., *Acta Astron.* **18** (1968) 255.
[11] Paczynski, B. E., *Acta Astron.* **20** (1970) 47.
[12] Gunn, J. E. and Ostriker, J. P., *Astrophys. J.* **160** (1970) 979.
[13] Arnett, W. D. and Schramm, D. N., *Astrophys. J.* **184** (1973) L 47.
[14] Schramm, D. N. and Arnett, W. D., *The weak interaction and gravitational collapse*, preprint (1975).
[15] Hoyle, F., Mon. Not. **106** (1946) 343.
[16] Burbridge, G., Burbidge, M., Fowler, W. and Hoyle, F., *Rev. Mod. Phys.* **29** (1957) 547.
[17] Fowler, W. A. and Hoyle, F., *Astrophys. J. Suppl.* **9** (1964) 201.
[18] Colgate, S. A. and White, R. H., *Astrophys. J.* **143** (1966) 626.
[19] Arnett, W. D., *Astrophys. J.* **153** (1968) 341.
[20] Wilson, J. R., *Astrophys. J.* **163** (1971) 209.
[21] Arnett, W. D., Truran, J. W. and Woosley, S. E., *Astrophys. J.* **165** (1971) 87.
[22] Colgate, S. A., *Astrophys. J.* **163** (1971) 221.
[23] Bruenn, S. W., *Astrophys. J.* **168** (1971) 203.
[24] Barkat, Z., Wheeler, J. C. and Buchler, J. R., *Astrophys. J.* **171** (1972) 651.
[25] Bruenn, S. W., *Astrophys. J. Suppl.* **24** (1972) 283.
[26] Paczynski, B., *Appl. Lett.* **11** (1972) 53.
[27] Bruenn, S. W., *Astrophys. J.* **183** (1973) L 125.
[28] Ostriker, J. P. and Gunn, J. E., *Astrophys. J.* **164** (1971) L 95.
[29] Bodenheimer, P. and Ostriker, J. P., *Astrophys. J.* **191** (1974) 465.
[30] Gordon, C., *Astron. Astrophys.* **29** (1973) 123.
[31] Kirshner, J. B., *Astrophys. J.* **180** (1973) L 97.

DEUXIEME PARTIE

INFLUENCE OF COMPTON FREQUENCY SHIFTS ON THE SPECTRUM OF X AND γ BACKGROUND. SOLUTION OF THE TRANSFER EQUATION

We assume in the following that the "initial" spectrum from the sources is distorted by Compton scattering as the radiation propagates through a medium, before coming to the Earth.

1. TRANSFER EQUATION.

Assuming a plane-parallel geometry, the equation of transfer may be written :

$$\mu \cdot \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \qquad (1)$$

where $\mu = \cos\theta$, and $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$ is the intensity of radiation at angle θ from the axis $\vec{Oz}$. The optical depth is : $d\tau_\nu = \sigma_\nu \rho dz$, where σ_ν is the Compton scattering opacity by mass, and S_ν, the source function, has the general form [1] :

$$S_\nu(\tau_\nu, \mu) = \frac{1}{\sigma_\nu} \int I_{\nu'}(\hat{n}') \, R(\nu', \hat{n}' \; ; \; \nu, \hat{n}) \, d\nu' \, \frac{d\omega'}{4\pi} \qquad (2)$$

The "redistribution function" $R(\nu', \hat{n}' \; ; \nu, \hat{n})$ describes the probability of scattering of a photon from solid angle $(\hat{n}', d\omega')$ and frequency $(\nu', d\nu')$ into solid angle $(\hat{n}, d\omega)$ and frequency $(\nu, d\nu)$.

For the case of Compton scattering, we introduce the total scattering cross section $\sigma(\nu)$, and the differential cross section for scattering angle α, $\sigma(\nu', \alpha)$; the frequency ν of the emerging photon is given by :

$1 - \cos\alpha = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu'}$, or : $\nu = N(\nu', \alpha)$ (we have set : h=c=m=1) ;

the redistribution function is then :

$$R(\nu',\hat{\Omega}' ; \nu , \hat{\Omega}) = 4\pi\, \sigma(\nu',\alpha)\ \ \delta(\nu - N(\nu',\alpha))$$

Substituting into eq. (2), we get the source function for Compton scattering :

$$S_\nu(\tau_\nu,\hat{\Omega}) = \frac{1}{\sigma(\nu)} \iiint I_{\nu'}(\tau_\nu,\hat{\Omega}')\, \sigma(\nu',\alpha)\, \frac{\nu}{\nu'}\, \delta(\nu - N(\nu',\alpha))\, d\nu'\, d\omega' \qquad (3)$$

It should be noted that this expression is purely local, and is free of any assumption on the geometry of the system ; the factor $\frac{\nu}{\nu'}$ in the integrand has been introduced to account for the energy loss due to scattering.

Obviously, we can perform at once the integration over frequency, and we get :

$$S_\nu(\tau_\nu,\hat{\Omega}) = \frac{1}{\nu\sigma(\nu)} \iint I_{\nu'}(\tau_\nu,\hat{\Omega}')\, \nu'\sigma(\nu',\alpha)\, d\omega' \qquad (4)$$

where ν' is now given by :

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \frac{\nu}{m}(1-\cos\alpha)} \quad , \quad \text{and} \quad \cos\alpha = \hat{n} \cdot \hat{\Omega}' \ ; \qquad (5)$$

in spherical coordinates (μ,φ), $\cos\alpha$ is expressed as :

$$\cos\alpha = \mu\mu' + \cos(\varphi'-\varphi)\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)} \qquad (6)$$

In cases where the intensity distribution has an axis of symmetry, the integral over the angle φ' can be performed in integrals of the type $\int_{-1}^{+1} S_\nu(\tau_\nu,\mu)\, F(\mu) d\mu$; in particular, the moments of the source function can be expressed as one dimensional integrals of the moments of the intensity of lower order.

2. MOMENTS OF THE SOURCE FUNCTION.

We assume the existence of a symmetry axis, $\vec{Oz}$ which we take as the reference axis for the spherical coordinates (μ, φ) ; the moment of order n is :

$$\sum_{\nu}^{(n)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} S_{\nu}(\mu)\, \mu^n\, d\mu \ . \tag{7}$$

Substituting into eq. (4), we find :

$$\sum_{\nu}^{(n)} = \frac{1}{2\nu\sigma(\nu)} \iiint I_{\nu'}(\mu')\, \nu'\sigma(\nu',\alpha)\, \mu^n\, d\mu\, d\mu'\, d\varphi' \ .$$

Instead of integrating over $d\mu$, $d\mu'$, $d\varphi'$, we choose the new set of variables $d\mu\, d\mu'\, d\alpha$: from eq. (6), we have :

$$d\mu\, d\mu'\, d\varphi' = \frac{\sin\alpha}{\left|\sin\theta \sin\theta' \sin(\varphi'-\varphi)\right|}\, d\mu\, d\mu'\, d\alpha =$$

$$= \frac{d\mu\, d\mu'\, d\mu_\alpha}{\sqrt{1-(\mu^2+\mu'^2+\mu_\alpha^2-2\mu\mu'\mu_\alpha)}} = \frac{d\mu\, d\mu'\, d\mu_\alpha}{\sqrt{(\mu_2-\mu')(\mu'-\mu_1)}}$$

and the limits of integration are : $\mu_1 \equiv \cos(\theta+\alpha) \leq \mu' \leq \mu_2 \equiv \cos(\theta-\alpha)$. The moment $\sum_{\nu}^{(n)}$ is then :

$$\sum_{\nu}^{(n)} = \frac{1}{\nu\sigma(\nu)} \int_{-1}^{+1} d\mu_\alpha\, \nu'\sigma(\nu',\alpha) \int_{-1}^{+1} d\mu'\, I_{\nu'}(\mu') \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{\mu^n\, d\mu}{\sqrt{(\mu_2-\mu')(\mu'-\mu_1)}} \tag{8}$$

The last integral (over $d\mu$) can be evaluated analytically, and is a polynomial of degree n in μ' and μ_α (or in μ_1 and μ_2). Defining :

$$f_n(\mu',\mu_\alpha) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{\mu^n\, d\mu}{\sqrt{(\mu_2-\mu')(\mu'-\mu_1)}} \tag{9}$$

we have, for the first values of n :

$$\begin{cases} f_0(\mu',\mu_\alpha) = \pi \\ f_1(\mu',\mu_\alpha) = \pi\,\mu'\,\mu_\alpha \\ f_2(\mu',\mu_\alpha) = \frac{\pi}{2}(1-\mu'^2+3\mu'^2\,\mu_\alpha^2) \end{cases} \qquad (10)$$

In terms of the moments of order 0, 1, 2 of the intensity, i.e. : J_ν, H_ν and K_ν, the eq. (8) and (10) give us the following expressions of $\sum_\nu^{(n)}$:

$$\begin{cases} \sum_\nu^{(0)} = \frac{2\pi}{\nu\sigma(\nu)} \int_{-1}^{+1} J_{\nu'}\,\nu'\sigma(\nu',\alpha)\,d\mu_\alpha \\ \sum_\nu^{(1)} = \frac{2\pi}{\nu\sigma(\nu)} \int_{-1}^{+1} H_{\nu'}\,\nu'\sigma(\nu',\alpha)\,\mu_\alpha\,d\mu_\alpha \\ \sum_\nu^{(2)} = \frac{\pi}{\nu\sigma(\nu)} \int_{-1}^{+1} \left\{ (1-\mu_\alpha^2)J_{\nu'} + (3\mu_\alpha^2-1)K_{\nu'} \right\} \nu'\sigma(\nu',\alpha)\,d\mu_\alpha \end{cases} \qquad (11)$$

It should be noted that, in these integrals, ν' is a function of α (see eq. (5)). Indeed, the integral over α may be replaced by an integral over ν', between the limits of integration ν and ν'_{Max} ; if $\nu < \frac{m}{2}$, $\nu'_{Max} = \frac{\nu}{1-2\nu}$, otherwise ν'_{Max} is infinity.

3. SOLUTION OF THE EQUATION OF TRANSFER.

The transfer equation (1), (4) becomes much simpler when one considers only the moments : taking the moment of order n, eq. (1) becomes :

$$\frac{d\,I_\nu^{(n+1)}}{d\tau_\nu} = I_\nu^{(n)} - \sum_\nu^{(n)} \qquad (12)$$

Taking the n first moments, we get a system of n integro-differential equation for the n+1 unknown moments $I_\nu^{(0)} = J_\nu$, $I_\nu^{(1)} = H_\nu$, $I_\nu^{(2)} = K_\nu$, ... $I_\nu^{(n)}$, so that we need one more relation in order to solve this system ; we may choose a linear relation, between the $I_\nu^{(n)}$, for example the condition of orthogonality to the Legendre polynomial P_n :

$$\int_{-1}^{+1} I_\nu(\tau,\mu)\, P_n(\mu)\, d\mu = 0 \ ;$$

in the limit $n \to \infty$, we should get the correct answer, since the component of I_ν on Legendre polynomials of high order must be negligibly small.

For n = 2, we get a system of two equations for the three unknown functions J_ν, H_ν, K_ν, and the orthogonality condition to $P_2(\mu) = \frac{3\mu^2-1}{2}$ is precisely the so-called Eddington's approximation :

$$J_\nu = 3\, K_\nu \qquad (13)$$

The system of equations to be solved is therefore, in Eddington's approximation and for a plane-parallel geometry :

$$\begin{cases} \dfrac{d\, H_\nu}{d\tau} = \sigma(\nu)\, J_\nu - \dfrac{2\pi}{\nu} \displaystyle\int_\nu^{\nu' \mathrm{Max}} J_{\nu'}(\tau)\, \sigma(\nu' \to \nu)\, \frac{d\nu'}{\nu'} \\ \dfrac{d\, K_\nu}{d\tau} = \sigma(\nu)\, H_\nu - \dfrac{2\pi}{\nu} \displaystyle\int_\nu^{\nu' \mathrm{Max}} H_{\nu'}(\tau)\, \sigma(\nu' \to \nu)\left(1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'}\right) \frac{d\nu'}{\nu'} \\ J_\nu = 3\, K_\nu \end{cases} \qquad (14)$$

where $\sigma(\nu' \to \nu)$ is the differential cross section $\sigma(\nu', \alpha)$ for $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'}$, and $d\tau$ is the optical depth for Thomson scattering ; the cross section $\sigma(\nu)$ is normalized to the Thomson cross section, i.e. : $\sigma(0) = 1$.

4. CONSERVATION OF THE TOTAL NUMBER OF PHOTONS.

The 0^{th}-order moment of the transfer equation is :

$$\frac{d\,H_\nu}{d\tau} = \sigma(\nu)\ (J_\nu - \Sigma_\nu^{(0)})$$

Multiplying by $\frac{d\nu}{\nu}$ and integrating over the whole spectrum, we get :

$$\frac{d}{d\tau}\int_0^{+\infty} \frac{H_\nu(\tau)\ d\nu}{\nu} = \int_0^{+\infty} J_\nu(\tau)\ \frac{\sigma(\nu)\ d\nu}{\nu} - \int_0^{+\infty} \Sigma_\nu^{(0)}(\tau)\ \frac{\sigma(\nu)\ d\nu}{\nu}$$

Making use of eq. (11) for $\Sigma_\nu^{(0)}(\tau)$ and of the normalization condition for $\sigma(\nu' \to \nu)$:

$$\int_{\nu_{Min}}^{\nu'} \frac{\sigma(\nu' \to \nu)}{\nu^2} = \frac{\sigma(\nu')}{2\pi}$$

we find :

$$\int_0^{+\infty} \Sigma_\nu^{(0)}(\tau)\ \frac{\sigma(\nu)}{\nu}\ d\nu \equiv \int_0^{+\infty} J_\nu(\tau)\ \frac{\sigma(\nu)}{\nu}\ d\nu\ ,$$

and consequently the quantity $\int_0^{+\infty} \frac{H_\nu(\tau)\ d\nu}{\nu}$ is independent of τ ; this expresses the conservation of the flux of photons by number. It is interesting to note that this result is valid whatever the "source" $J_\nu(\tau)$ is, and therefore the solution of system (14) in Eddington's approximation has also this property.

5. BOUNDARY CONDITIONS, AND HIGHER ORDER APPROXIMATIONS.

In the n^{th} approximation, we consider the moments of order 0, 1, ... 2n-1 of the equation of transfer, and we have a system of 2n equations giving $\frac{dH}{d\tau}$, $\frac{dK}{d\tau}$, ... $\frac{dI^{(2n)}}{d\tau}$ in the form of integrals involv-

ving J, H, K, ... $I^{(2n-1)}$. We assume orthogonality of $I(\mu)$ to the Legendre polynomial $P_{2n}(\mu)$, so that the system has now as many equations as unknown functions, and we just need to specify 2n boundary conditions in order to determine completely the solution.

For the case of a slab bounded by its two faces, we must then have n conditions at each boundary.

Boundary conditions at $\tau = 0$ (no incident radiation).

Given the n moments J, H, ... $I^{(n-1)}$ at $\tau = 0$, we may write the intensity as :

$$I(\tau = 0, \mu) = Y(\mu) \left\{ a_0 + a_1 P_1(\mu) + \ldots + a_{n-1} P_{n-1}(\mu) \right\} \qquad (15)$$

where $Y(\mu)$ is the Heaviside's function, and the coefficients a_i may be determined from the n first moments. However, in the approximation of order n, $I(\mu)$ is a linear combination of P_0, P_1 ... P_{2n-1}, and therefore has 2n independent moments ; from the above equation (15) (which expresses the boundary condition $I(\tau = 0, \mu < 0) = 0$), we may express the n moments $I^{(n)}$ ... $I^{(2n-1)}$ as functions of J, H, ... $I^{(n-1)}$, or equivalently we find n relations between the moments J, H, ... $I^{(2n-1)}$. These relations are the boundary conditions at $\tau = 0$.

In the 1st order approximation, we find one relation :

$$J(0) = 2H(0)$$

and, in the 2nd approximation :

$$\begin{cases} J(0) = \frac{9}{2} H(0) - 5 I\binom{3}{0} \\ \\ K(0) = \frac{H(0)}{4} + \frac{5}{6} I\binom{3}{0} \end{cases} \qquad (16)$$

The Eddington relation : $J(0) = 2H(0)$ is not very accurate : the exact result for the grey atmosphere problem is indeed $J = \sqrt{3}H$, so

that the error is 16%. However, the system (16) is much more accurate : for the grey case, we have : $J = 1$, $H = 1/\sqrt{3}$, $K = 0.410176$, $I^{(3)} \simeq 0.3190$ and the system (16) gives : $J = 1.0028$ and $K = 0.4102$; the error is now only 0.2%.

Boundary conditions in the injection region.

If we assume a source located at the central plane (z=o) of the slab, emitting a direct intensity $I_d(\mu)$ symetrically, the intensity at z=o ($\tau = \tau_o$) is :

$$I(\tau_o, \mu) = Y(\mu) I_d(\mu) + I_s(\tau_o, \mu)$$

and the scattered intensity $I_s(\tau_o, \mu)$ is an even function of μ. Given $I_d(\mu)$, we are given the n moments of odd order :

$$I^{(2p+1)}(\tau_o) = \frac{1}{2} \int_0^1 I_d(\mu)\, \mu^{2p+1}\, d\mu$$

These are the n boundary conditions at $\tau = \tau_o$.

6. EXPLICIT FORM OF THE INTENSITY. IMPROVED SOLUTION OBTAINED BY APPLICATION OF THE "Λ-OPERATOR".

In the n^{th} approximation, our method gives the source function in the form :

$$S_\nu(\tau, \mu) = \sum_{p=o}^{2n} A_p(\tau)\, \mu^p \qquad (17)$$

For example, in the 1^{st} approximation we find :

$$S_\nu(\tau,\mu) = \frac{\sum_\nu^{(0)}(\tau) - 15 \sum_\nu^{(2)}}{4} + 3\mu \sum_\nu^{(1)}(\tau) + \frac{15}{4}\mu^2 \left(3\sum_\nu^{(2)} - \sum_\nu^{(0)}\right). \qquad (18)$$

From the source function, we get at once the intensity :

$$\begin{cases} I_\nu(\tau,-\mu) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t,-\mu)\, e^{-(\tau_\nu - t)/\mu}\, dt \\ \\ I_\nu(\tau,+\mu) = I_\nu(\tau_o,+\mu)\, e^{-(\tau_{o\nu} - \tau_\nu)/\mu} + \frac{1}{\mu}\int_{\tau_\nu}^{\tau_{o\nu}} S_\nu(t,\mu)\, e^{(-t-\tau_\nu)/\mu}\, dt \end{cases} \qquad (19)$$

and $I_\nu(\tau_o,+\mu) = I\,(\tau_o,-\mu) + I_\nu^d(\mu)$.

In simple cases where the source function is isotropic, like the grey atmosphere problem (Milne's problem), the angular integration can be performed when taking the moments of I_ν, and the integrals over $d\tau$ which give then $J(\tau)$, $H(\tau)$, $K(\tau)$ are called the Λ, $\emptyset$, and X-operators ; the Λ-operator introduced by Scharschild is such that :

$$\Lambda_\tau\left[f(t)\right] = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)\, E_1(|t-\tau|)\, dt$$

where $E_n(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}\, dt}{t^n}$ is the n^{th} exponential integral.

The mean intensity is then, for a semi-infinite atmosphère and an isotropic source function :

$$J(\tau) = \Lambda_\tau\left[S(t)\right]$$

In our case, we must take account of the angular dependence of $S_\nu(t,\mu)$, and of the perturbing boundary at τ_o, and we get for the mean intensity :

$$J(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{p=o}^{2n}\left\{\alpha_p\, E_{p+2}(\tau_o - \tau) + (-1)^p \int_o^{\tau} A_p(t) E_{p+1}(\tau - t)\, dt + \int_{\tau}^{2\tau_o} A_p(t) E_{p+1}(t-\tau)\, dt\right\} \qquad (20)$$

The first term on the right hand side of eq. (20) comes from the injection at $\tau = \tau_o$:

$$I_\nu^d(\mu) = \sum_{p=o}^{2n} \alpha_p \, \mu^p$$

and would be replaced by an integral over τ for an injection distributed throughout the slab ; the last integral of eq. (20) may be simplified by using the symmetry of the source function :

$$S(2\tau_o - \tau, -\mu) = S(\tau, \mu), \quad \text{or} \quad : A_p(2\tau_o - \tau) = (-1)^p A_p(\tau).$$

Equation (20) is the analog of the Λ operator for isotropic source functions. It is well known that, starting from approximate values of the source function, application of this operator gives much more accurate solutions : for example there is a 16% error in the Eddington's mean intensity $J = 3H(\tau + 2/3)$, but this error is reduced to 1% by application of the operator Λ.

So, we should obtain solutions of 1% accuracy in the following way :

- first, solve the 2^{nd}-order system (14), and this can be done easily by iteration ;
- second, find the improved value of $J(\tau)$ by using eq. (20) ;
- the flux $H(\tau)$ is then given by the first equation (14).

Note that we get in this way the exact value of the emerging flux in both limits of low and high energy : indeed, at low energies, the first equation (14) reduces to : $\frac{dH_\nu}{d\tau} = 0$, for any value of the mean intensity $J_\nu(\tau)$, and the result $H_\nu(0) = H(\tau_0)$ is an exact result ; at high energies, the optical depth $\sigma(\nu)\tau_0$ is small, and again $H_\nu(0) = H_\nu(\tau_0)$ (we neglect processes like pair creation, which become important beyond 10 MeV) ; furthermore, the boundary condition $J_\nu(0) = 2H_\nu(0)$ becomes exact at high energies, since the source spectrum is injected isotropically.

7. RESULTS.

We assumed a plane-parallel geometry, with the source located at the center and radiating isotropically ; this seems to be a reasonable geometry for accretion disk models of X-ray sources, and has already been used in theoretical studies, like that of Felten and Rees [2] on Sco X1 (however, Felten and Rees assumed a bremsstrahlung emissivity, which was uniformly distributed throughout the slab).

Starting from a power law spectrum $H(\nu)$ for the injected flux $H_\nu(\tau_0)$, the system (14) is solved by iteration. The emerging spectrum presents an extended depletion in the range $\nu \sim 20$ keV to several MeV, for moderate optical depths ($\tau_0 \lesssim 10$) ; the depletion is maximum near a few hundred keV (by about a factor 5 for $\tau_0 = 4$). The depletion factor, $H(o)/H(\tau_o)$, is shown in fig. 1 for several values of the optical depth, $\tau_o = 0$ to 6. We assumed an injection spectrum $E^{-0.75}$, but the result depends only weakly on the spectral index.

REFERENCES

(1) "Stellar atmospheres", by D. Mihalas (1970), ed. W. H. Freemann and Co.

(2) "Continuum radiative transfer in a hot plasma, with application to Scorpius X-1", by J. E. Felten and M. J. Rees, Astron. and Astrophys. 17, 226(1972).

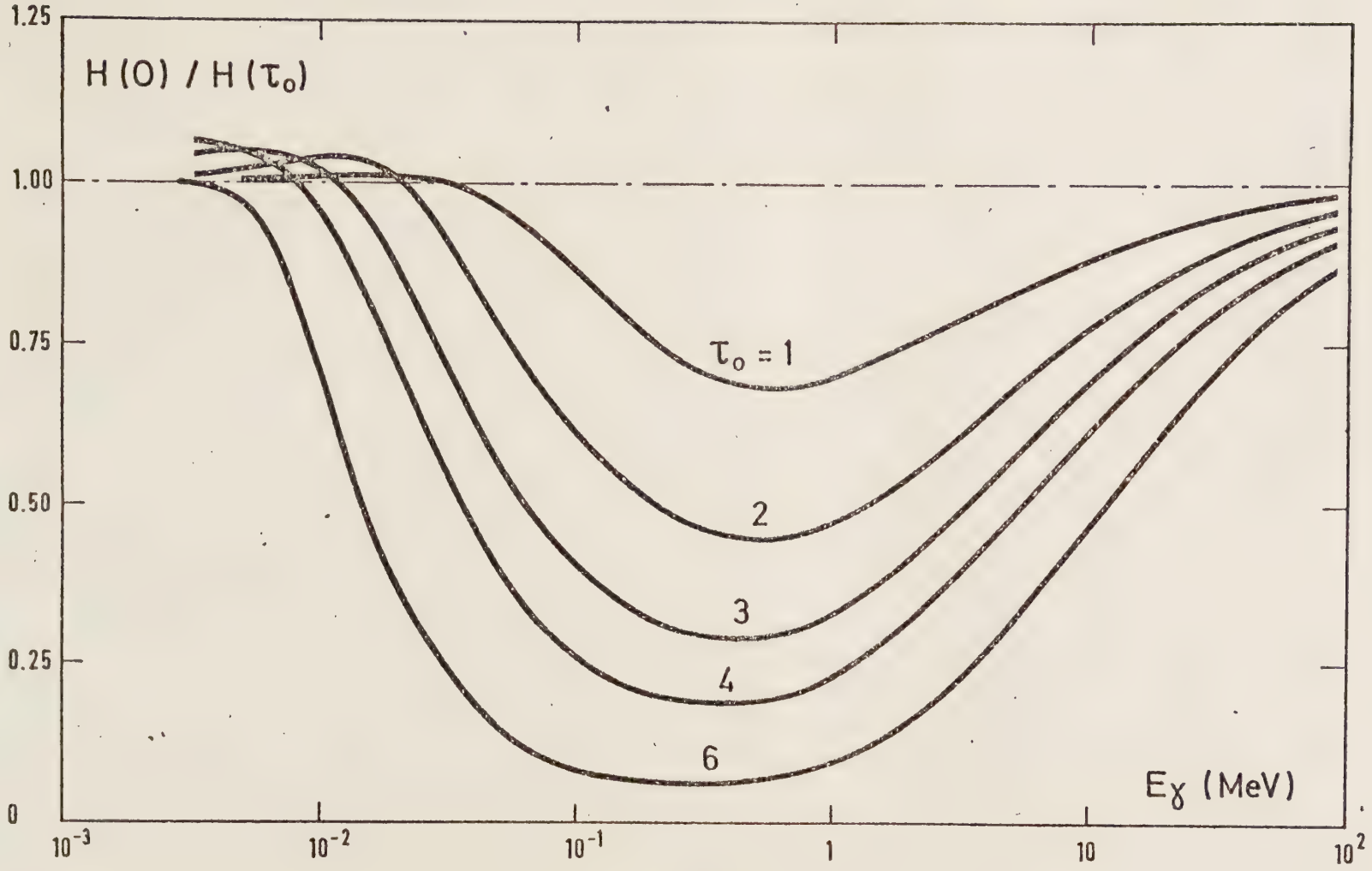


Fig. 1

Submitted to The Astrophysical Journal

SPECTRUM AND ORIGIN OF X AND GAMMA RAY DIFFUSE BACKGROUND

Robert Rocchia, René Ducros, Bernard Gaffet

Division de la Physique, Section Etudes Spatiales
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, B.P. 2
91190 - Gif-sur-Yvette(France)

Received _____

ABSTRACT

The effects of Compton interactions of X and gamma ray spectra with low energy electrons are examined. It is demonstrated that these interactions can explain spectral singularities around 25 keV and 1 MeV observed in the X and gamma ray diffuse background spectrum. These interactions occur very likely in the source of radiation. Then, most of the X and gamma ray diffuse background would be due to a large number of unresolved dense extragalactic objects which might be galactic nuclei or quasars. Observations of some extragalactic X ray objects confirm the existence of such sources.

Subject headings : X rays sources - Cosmic background radiation

I - INTRODUCTION

Among the problems raised by the existence of X and gamma ray diffuse background, one of the most exciting is the origin of its successive spectral singularities. Especially, the break at about 30 keV and the radiation excess in the MeV range have been the object of many theoretical studies, most of which have tried to explain their existence separately.

The current opinion about the X ray spectrum break is that the electrons, creating the X ray diffuse background by inverse Compton interaction on low energy photons, have a change of index in their spectrum. This change would be localised between two ranges where different energy loss regimes prevail.

The second singularity, the excess of radiation around 1 MeV, could be produced by π° decay during the early phase of the universe ($Z \sim 100$). No global successful explanation of these two features has been proposed. In the following sections, we investigate the effect of Compton interactions that X and gamma radiations may suffer between the place of production and the observer. We demonstrate that these interactions can explain both singularities mentioned above.

II - OBSERVATIONAL DATA

Since the discovery of the diffuse X and gamma ray background, the observations have shown that :

. In the medium energy X ray range (1 - 10 keV) the spectral index of the power spectrum is lower than 1 and is sometimes supposed to be the same as the radio source index (0.75). Measured values range between 0.4 and 0.8.

. At higher energy, between 50 and 400 KeV spectral index is larger than 1.2. Within the interval 10 - 50 KeV, the index changes so rapidly that it is possible to speak of a "break" of the X-ray spectrum. Fukada et al. (1975) performed a careful study of this "break" and gave evidence that the index changes by more than 0.5 within an interval smaller than 50 keV.

. In the low energy gamma ray range (500 keV - a few MeV) the observed flux is larger than the extrapolation of the 50 - 400 KeV spectrum. The index is as low as 0.5.

. At very high energy ($E > 10$ MeV) a very fast decrease of the spectrum is observed. The index reaches the value 1.7 at 100 MeV.

In comparison with the very low and very high energies the medium energy range (50 keV - 1 MeV) appears to be depressed. Fig. 1 presents the results of some recent experiments. The usual interpretation is that the spectrum is made of two components :

. A Compton component due to inverse Compton interactions with the relict radiation at 2.7°K (see for instance Felten and Morrison, 1966 , Bergamini et al., 1967) or with infra-red and visible photons in nuclei of extragalactic objects (Longair and Sunyaev, 1969).

. A hard component given by π° decay which occured during the early stage of the Universe ($Z \sim 100$) and redshifted to the MeV range (Stecker, 1973).

To explain the change of index around 30 KeV it is necessary to assume that there is a break in the electron spectrum involved in the inverse Compton process (see for instance Longair and Sunyaev, 1969). Cowsik and Kobetich (1971) proceeded to an exact computation of the X ray spectrum produced by electrons interacting with the blackbody radiation at 2.7°K. They found that

if there is a break of unity in the electron spectrum, the X ray spectrum exhibits a very slowly varying slope over two or three decades. This, obviously, cannot explain the observations of Fukada et al. (1975).

Such a difference between calculated and observed spectra seems to rule out explanations involving a change of the electron spectrum index. This is in our opinion the main reason to look for another theory. All the theories presented so far tried to explain the 30 KeV break with considerations about the emission conditions only. We present in the next section an attempt to explain the X and gamma ray singularities, which does not involve the emission mechanism.

III - EFFECT OF MATTER ON AN X-GAMMA RAY SPECTRAL DISTRIBUTION

Most of the astrophysical X ray sources are not thin but are dense enough to disturb their emission spectra in an observable way. We shall study carefully the effect of Compton scattering and demonstrate that this kind of interaction can explain the main features observed in the X-gamma ray diffuse background. Very qualitatively we can predict the results of Compton scattering after interaction of a radiation with a given amount of matter. Let us consider, for instance, a source imbedded in a scattering cloud and suppose that the scattering medium is fully ionized. Consequently we neglect photoelectric absorption and only take into account scattering by low energy free electrons.

One can expect that the spectrum is not appreciably disturbed at low energy (< 10 KeV) because scattering is nearly coherent and at high energy ($>$ a few MeV) where the scattering cross section is negligible. In contrast in the range of a few hundred keV, the cross section is still important and scattering affects very much the photon energy. This should result in a wide depression of the spectrum.

In a preliminary analysis (Rocchia and Ducros, 1975) we studied the effect of Compton scattering under the simplifying assumption that the amount of matter which photons interact with along their random-walk within the scattering medium is the same for all photons and independent of energy.

This is equivalent to a one dimensional analysis and does not take into account the real distribution of photon path and its variation with energy. Nevertheless this confirmed the importance of Compton scattering for the understanding of the spectral features of the diffuse background. In a more precise analysis, one of us (B. Gaffet) developed a method for solving the equation of transfer for Compton scattering of photons of arbitrary energy ; the method is based on an expansion involving the moments of the source function, and is briefly described below.

a) Transfer equation

Assuming a plane-parallel geometry, the equation of transfer may be written as :

$$\mu \frac{\partial I(E, \tau_E, \mu)}{\partial \tau_E} = I(E, \tau_E, \mu) - S(E, \tau_E, \mu)$$

where $\mu = \cos\theta$, and $I(E, \tau_E, \mu)$ is the radiation intensity at angle θ from the z-axis.

The optical depth is $\tau_E = \sigma_c(E) . \rho . Z$ where $\sigma_c(E)$ is the Compton opacity by mass and $S(E, \tau_E, \mu)$ the source function has the general form (Mihalas, 1970) :

$$S(E, \tau_E, \mu) = \frac{1}{\sigma_c(E)} \int\!\!\!\!\oint I(E', \tau_{E'}, \mu) R(E', \vec{n}', E, \vec{n}) dE' \frac{d\omega'}{4\pi}$$

The "redistribution function" $R(E', \vec{n}', E, \vec{n})$ describes the probability of scattering a photon from solid angle $(\vec{n}', d\omega')$ and energy (E', dE') into solid angle $(\vec{n}, d\omega)$ and energy (E, dE). For the case of Compton scattering we introduce the total scattering cross section $\sigma_c(E)$ and the differential cross section $\frac{d\sigma_c(E', \alpha)}{d\omega}$ for scattering angle α. The energy E of the emerging photon is given by $1 - \cos\alpha = \frac{1}{E} - \frac{1}{E'}$ or $E = N(E', \alpha)$, where E and E' are expressed in units of moc^2, the electron rest energy. The redistribution function is then :

$$R(E', \vec{n}', E, \vec{n}) = 4\pi \frac{d\sigma_c}{d\omega}(E', \alpha) \delta(E - N(E', \alpha)) \frac{E}{E'}$$

The factor $\frac{E}{E'}$ is introduced to account for the energy loss due to scattering. With this value of the "redistribution function" and after integration over E we get the source function :

$$S(E, \tau_E, \vec{n}) = \frac{1}{E\sigma_c(E)} \int\!\!\!\!\oint I(E', \tau_{E'}, \vec{n}') E' \frac{d\sigma_c}{d\omega}(E', \alpha) d\omega'$$

Since we are interested only in the flux emerging from the slab, it is convenient to introduce the moments :

$$J(E, \tau_E) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(E, \tau_E, \mu) d\mu$$

$$H(E, \tau_E) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(E, \tau_E, \mu) \mu d\mu$$

$$K(E, \tau_E) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(E, \tau_E, \mu) \mu^2 d\mu$$

After multiplication of the equation of transfer by μ, μ^2 integration over μ and making use of the Eddington's approximation we get the following system of equations :

$$\frac{\partial H(E,\tau)}{\partial \tau} = \sigma_c(E)J(E,\tau) - \frac{2\pi}{E}\int_E^{E\,max} J(E',\tau)\,\sigma_c(E'\to E)\,\frac{dE'}{E'}$$

$$\frac{\partial K(E,\tau)}{\partial \tau} = \sigma_c(E)H(E,\tau) - \frac{2\pi}{E}\int_E^{E\,max} H(E',\tau)\sigma_c(E'\to E)\left(1-\frac{1}{E}+\frac{1}{E'}\right)\frac{dE'}{E'}$$

$$J(E,\tau) = 3\,K(E,\tau)$$

where $\sigma_c(E'\to E)$ is the differential cross section $\frac{d\sigma_c}{d\omega}(E',\alpha)$ for $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{E}+\frac{1}{E'}$ and τ is the optical depth for Thomson scattering $\sigma_c(E'\to E)$ and $\sigma_c(E)$ are here normalized to the Thomson cross section.

$$E_{max} = \frac{E}{1-2E} \quad \text{if } E < \frac{1}{2}$$

$$= \infty \text{ if } E \geq \frac{1}{2}$$

Details about formulation and solution of this system of equations can be found in a more specific paper (B. Gaffet, in preparation).

b) Results

Numerical computations were carried out for a finite plane parallel atmosphere bounded at its two faces $\tau_o = 0$ and $\tau = 2\tau_o$, with an isotropically emissive layer at $\tau = \tau_o$ and no incident radiation. This geometry seems to be reasonable for accretion disks.

Fig. 2 shows the energy spectrum for $\tau_o = 0$ (initial spectrum), 2 and 4. The initial spectrum was chosen in such a way that we get a reasonably good fit of the diffuse background at low and very high energy. Its spectral index is slowly varying from 0.75 at low energy to ~ 2 around 100 MeV. Fig. 3 displays the spectral index variation of these spectra. One can note the quick variation around 15-20 keV. The similarity of computed and observed spectra is so obvious that it is reasonable to propose the following explanation :

. The break around 20 keV in the diffuse X-ray spectrum is not due to the emission mechanism but to Compton scattering that photons suffer before their detection.

. The excess around 1 MeV is, in fact, the resurgence of the initial spectrum. Only the parts of the spectrum at low energy (if photoelectric absorption is negligible) and at high energy (> 10 MeV) display the shape of the emission spectrum. The Thomson optical depth required to explain the observed features is about $\tau_o = 2$ to 4, equivalent to 5-10 g. cm^{-2} of hydrogen.

c) Discussion

Now let us envisage the different places where this scattering material can be located :

. in the vicinity of the observer
. in intergalactic space
. around and inside sources if the diffuse background is the result of a large number of unresolved sources.

(i) Matter in the vicinity of the observer

This consists in materials which envelope detectors (electronics, mechanical structure of the space-craft) to which we have to add, for balloon borne experiment, the residual atmosphere which is always of the order of a few g. cm^{-2}.

About the matter surrounding detectors one can note that special cautions were taken for the design of Apollo XV and Kosmos 461 experiments (Trombka et al., 1973 and Mazets et al., 1975). Detectors were surrounded respectively with 5 and 1 g. cm^{-2} of matter and located on the end of a boom at a few meters from the rest of the space-craft. Although an accurate evaluation of the random walk of photons in surrounding materials has not been done, it is difficult to understand how 1 g. cm^{-2} of light materials (equivalent for Compton scattering to 0.5 g. cm^{-2} of hydrogen or a Thomson optical depth $\tau_o = 0.2$) could produce such a large effect.

As far as the effect of residual atmosphere is concerned one could expect a difference between the results of balloon and satellite experiments, at least in the MeV range where photoelectric absorption is low. There is a difference, indeed, but it is weak. For instance, compare on fig. 1 the results of satellite experiments (Apollo XV and Kosmos 461) with those of balloon experiments (Vedrenne et al., 1971 ; Shönfelder et al., 1975). The excess at a few MeV is present and well visible in both type of experiments.

We can conclude that experimental conditions and local interactions, even if their contribution around 1 MeV is not completely negligible, are not responsible for the observed features.

(ii) Intergalactic matter

The effect of metagalactic electrons was already studied by Rees(1969) who underlined that in an Einstein De Sitter universe it is necessary to go up to Z = 7 to get one Thomson optical depth. One can show that, if it is dense enough, intergalactic matter can explain the observed features. But, in any case, the required density must be higher by at least one order of magnitude than the density necessary to close the Universe. Such a high value seems to disagree very much with the usually accepted values and especially with the results obtained on the origin of light elements (D, ^{3}He, ^{7}Li) in universe. According to the work of Reeves (1975) on this subject, the present density of matter is about 10^{-30} g.cm^{-3} around twenty times less than the closure density. So, we can exclude the effect of intergalactic matter.

(iii) Matter in the vicinity of X-gamma ray sources

If we suppose that there is in the universe a uniform distribution of sources emitting distorted spectra like those of fig. 2 we can expect that this will result in an isotropic background exhibiting the same spectral features. Indeed, this is confirmed by the integration over the redshift z in an expanding universe (Einstein De Sitter) supposed to be populated with sources having an optical thickness of the order of 4.

The effect of redshift (see fig. 4) is that the break is a little smoothed and pushed down to an energy which is a bit lower than in the observed background. This must not be considered as a worrying result because the position of the break in computed spectra depends on the source geometry. For instance with a spherical geometry, preliminary results show that the break is located at an energy higher by about 50% than the break of plane-parallel sources (see B. Gaffet, in preparation).

So, we can suggest that the shape of the diffuse background can be very nicely explained if one supposes that it is produced by a large number of dense unresolved discrete sources with τ_o of the order of a few units. This explanation excludes a strong X-gamma ray production in intergalactic space and transparent thin sources.

What is the nature of these dense sources ? To answer this question let us assume that the scattering cloud around X and gamma ray sources involved in our model has typical dimension and density, R and ρ, such that $\tau_o = \rho . R . \sigma_T \sim 4$. σ_T is the Thomson attenuation coefficient by mass. Table 1 summarizes the results for different values of the scattering cloud mass.

Here, the first row figures correspond to physical conditions in compact galactic sources (see Chodil et al., 1968 for physical conditions in Sco X1 for instance) like accretion disks. But compact sources radiate rather steep spectra and they are very unlikely to contribute significantly to the diffuse background at energies larger than a few tens of keV except for a few sources emitting extended hard spectra.

In the second row we find typical figures for the expanding envelope of a supernova a few weeks after its explosion. However the rate of explosion is too weak to explain a large fraction of the diffuse background.

Figures of the two last rows with masses between 10^2 and 10^4 $M_\odot$ are compatible with physical conditions which could prevail in galactic nuclei especially for Seyfert galaxies (Alloin, 1974) and quasars. The density of these objects in the universe

is large enough to explain without much hypothesis a few tens of per cent of the total diffuse background intensity (Silk, 1973). On the other hand the small size of the associated objects implies that rapid time variation of their emission can be expected.

The fluctuations on the scale of a few days, weeks or years, observed in the X ray intensity of two X ray extragalactic sources, M87 and Centaurus A (Janes et al., 1971 ; Davidson et al., 1975 ; Winckler et al., 1975), show that such small size sources do exist. The straightforward consequence of our model is that each of these sources should show a break at a few tens of keV and an excess in the MeV range. Presently the knowledge of extragalactic source spectra is not sufficiently accurate to confirm the existence of such features. We shall not discuss in this paper the emission mechanism about which we do not know much, and the origin of the high degree of ionization but we may note that, if our explanation of the diffuse background is correct, there is no need for an exotic several component emission spectrum. A single component with a spectral index slowly varying from 0.7 below 10 keV to 2. at high energy is sufficient.

IV - CONCLUSIONS

From this study, we can conclude that if X and gamma ray photons of the diffuse background interact before observation, with a few g. cm^{-2} of ionized matter, Compton scattering must induce a sharp break at a few tens of keV on the X ray spectrum and, an apparent excess around 1 MeV. Scattering in matter surrounding detector is not completely negligible and correction of experimental data must be done very carefully. Nevertheless, it seems difficult to explain the shape of the diffuse background with this local contribution only.

Thus, we are led to suppose that a strong fraction of the extragalactic diffuse X and gamma ray background is produced in rather dense small-sized objects, such as galactic nuclei, especially Seyfert galaxies, or quasars. This was already proposed for other reasons, by Longair and Sunyaev (1969).

A significant contribution to the understanding of the diffuse X ray background could be achieved by a careful spectral, spatial and temporal analysis of extragalactic sources. Wide range spectral observation of these objects are highly desirable. The existence in their spectra of features like those observed in the background spectrum would be a strong support of our model.

As far as the background spectrum is concerned an accurate and careful investigation around 20 keV and a few MeV would give a better localisation of the anomalies observed so far.

It is a pleasure to thank Dr James Lequeux from The Observatoire de Paris for very kind and useful advice and comments.

TABLE 1

M in $M_\odot$	R_{cm}	$\rho_{e.cm^{-3}}$	Nature of the objects
10^{-14}	8.10^{8}	10^{16}	Compact sources
1	8.10^{15}	10^{9}	Expanding supernova
10^{2}	8.10^{16}	10^{8}	Galactic nuclei and quasars
10^{4}	8.10^{17}	10^{7}	

Physical conditions in X ray sources

REFERENCES

Alloin, D. 1974, Astron. and Astrophys. 33, 337.

Bergamini, R., Londrillo, P., and Setti, G. 1967, Il nuovo Cimento, LIIB, N.2, 8699.

Chodil, G., Mark, M., Rodrigues, R., Seward, F.D., Swift, C.P., Turiel, I., Miltner, W.A., Wallerstein, G., and Mannery, E.J. 1968, Ap.J. 154, 645.

Cowsik, R., Kobetich, E J. 1971, 12th International Conference on Cosmic Rays, 1, 38.

Davison, P., Culhane, J., and Mitchell, R. 1975, Preprint, submitted to Ap.J. (Letters).

Felten, J.E. and Morrison, P. 1966, Ap.J. 146, 686.

Fukada, Y., Hayakawa, S. , Ikeda, M., Kasahara, I., Makino, F., and Tanaka, Y. 1975, Astrophysics and Space Science, 32, L1.

Janes, A.F., Pounds, K.A., Ricketts, M.J., and Rees, M.J. 1971 Nature Physical Science, 230, 188.

Longair, M.S. and Sunyaev, R.A. 1969, Astrophysical Letters, 4, 65.

Mazets, E.P., Golenetskii, S.V., Il'inski, V.N., Gur'yan, Y.A., and Kharitonova, T.V. 1975, Astrophysics and Space Science, 33, 347.

Rees, M.J. 1969, Astrophysical Letters, 4, 113.

Reeves, H. 1975, Annual Review of Astronomy and Astrophysics

Schönfelder, V., Lichti, G., Daugherty, J., Moyano, C. 1975, 14th International Cosmic Ray Conference, Munich, 1, 8.

Schwartz, D.A. and Peterson, L.E. 1974, Ap.J. 190, 297.

Stecker, F.W. 1973 in Proc. NASA Int. Symp. and Workshop on Gamma ray Astrophysics, Greenbelt, Preprint X-641-73-180.

Trombka, J.I., Metzer, A.E., Arnorld, J.R., Matteson, J.L., Reedy, R.C.T., and Peterson, L.E. 1973, Ap.J. 181, 737.

Vedrenne, G., Albernhe, F., Martin, I., and Ralon, R. 1971, Astron. and Astrophys. 15, 50.

Wynkler, P.F. Jr and White, A.E. 1975, Preprint, submitted to Ap.J. Letters.

FIGURE CAPTIONS

Fig. 1 The cosmic diffuse background as derived from various experiments .

Fig. 2 Computed energy spectra for different optical depths for Thomson scattering $\tau_o = 0, 2, 4$.

Fig. 3 Variation of spectral index with energy for $\tau_o = 0, 2, 4$.

Fig. 4 Energy spectrum in an expanding universe. The integration was carried out with the Einstein De Sitter metric up to $z = 3$ and with $\tau_o = 4$.

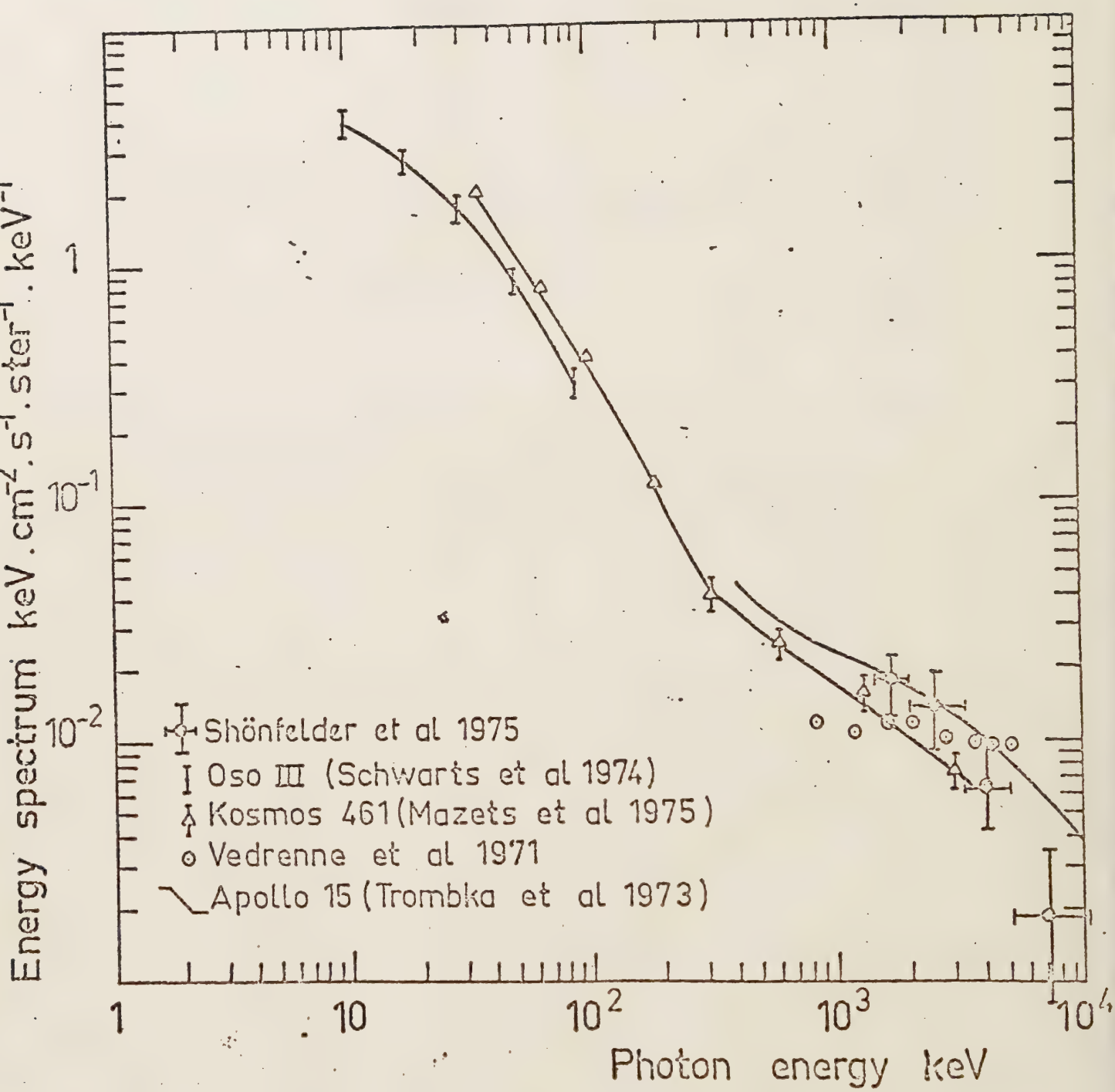

Energy spectrum keV.cm^{-2}.s^{-1}.ster^{-1}.keV^{-1}
1
10^{-1}
10^{-2}
Shönfelder et al 1975
Oso III (Schwarts et al 1974)
Kosmos 461 (Mazets et al 1975)
Vedrenne et al 1971
Apollo 15 (Trombka et al 1973)
1
10
10^2
10^3
10^4
Photon energy keV

Fig. 1

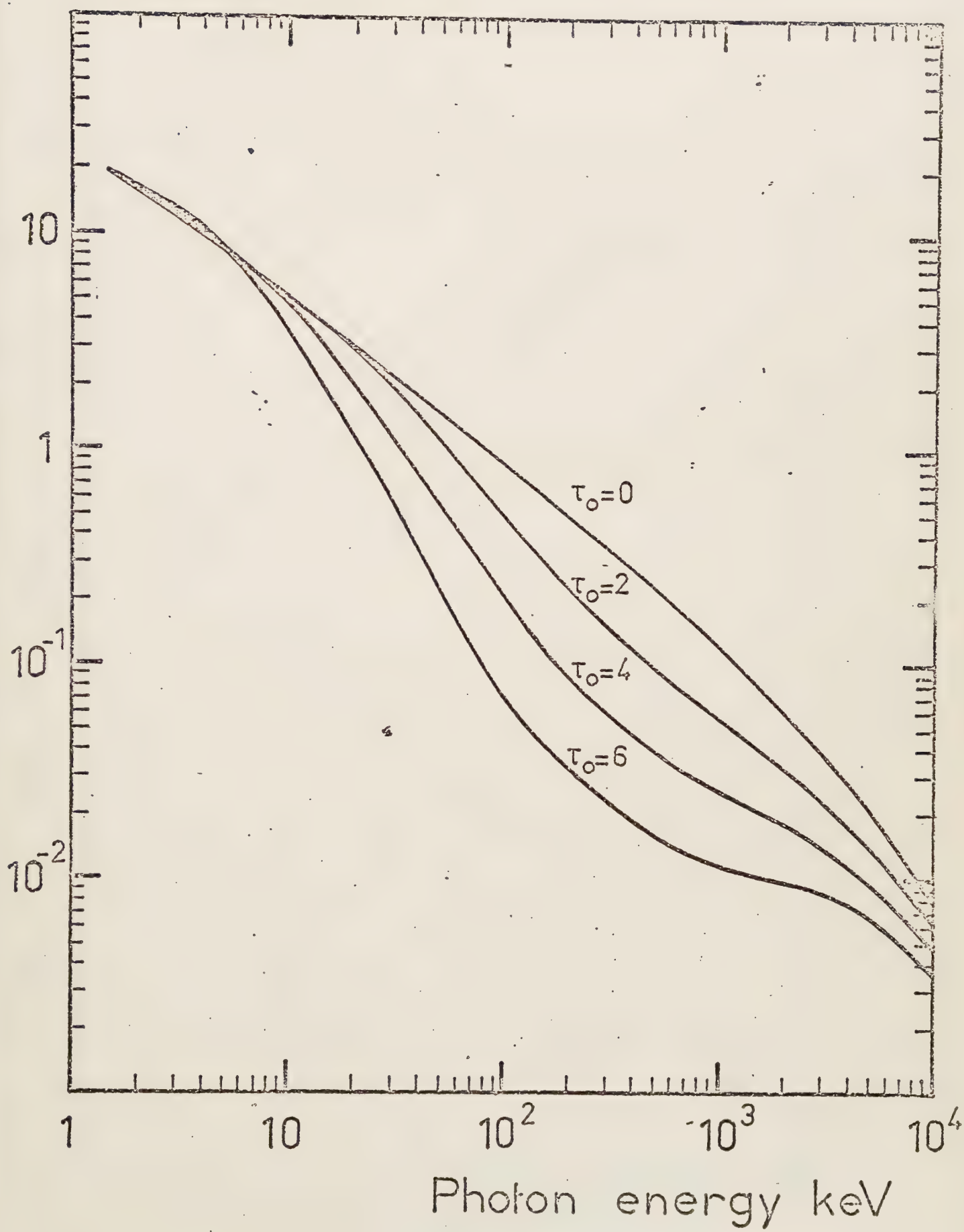
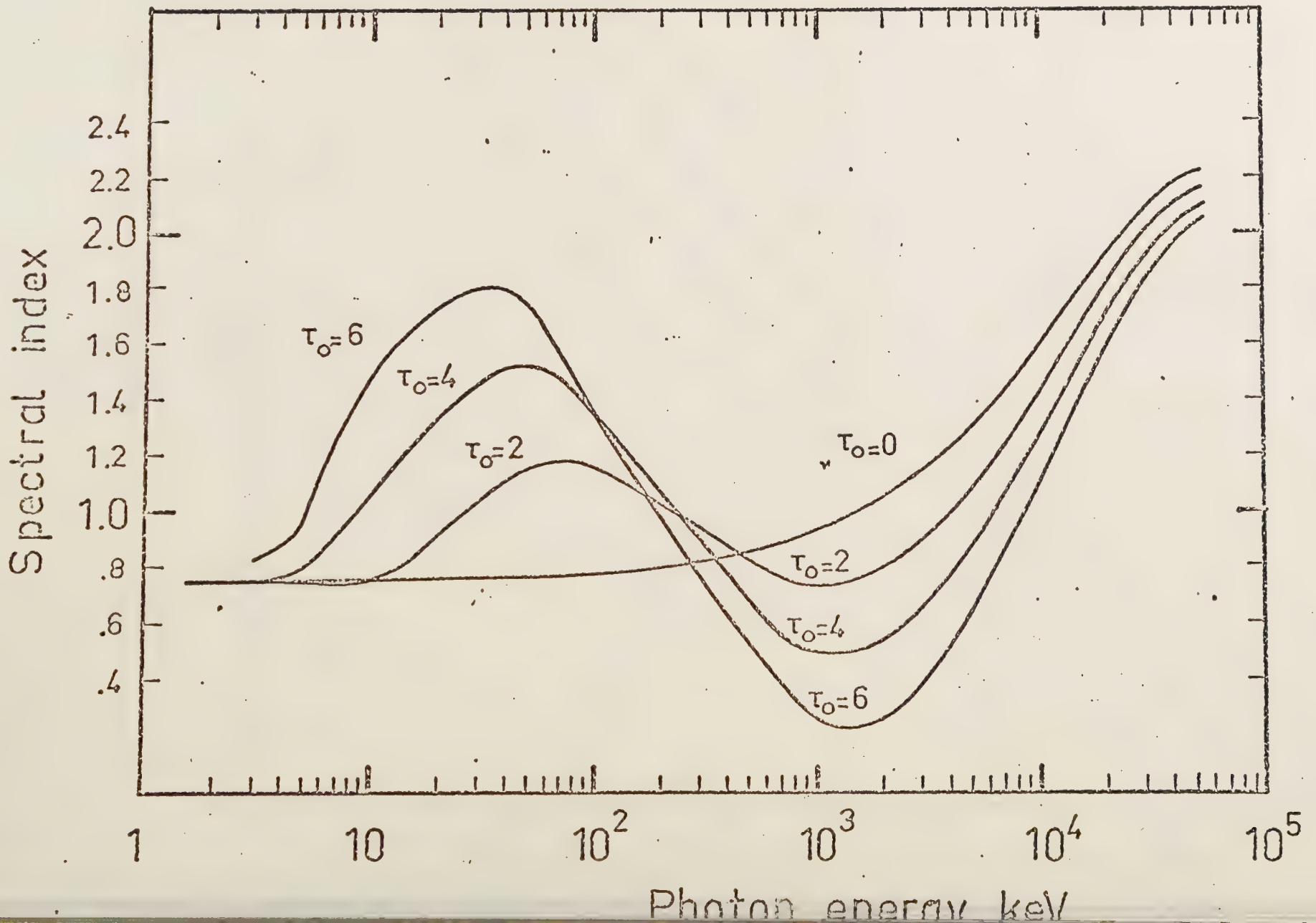

Energy spectrum S(E,τ) keV.cm⁻².s⁻¹.ster⁻¹.keV
10
1
10⁻¹
10⁻²
τo=0
τo=2
τo=4
τo=6
1
10
10²
10³
10⁴
Photon energy keV

Fig. 2

Fig.3


Spectral index
2.4
2.2
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
.8
.6
.4
τ_o=6
τ_o=4
τ_o=2
τ_o=0
τ_o=2
τ_o=4
τ_o=6
1
10
10^2
10^3
10^4
10^5
Photon energy keV

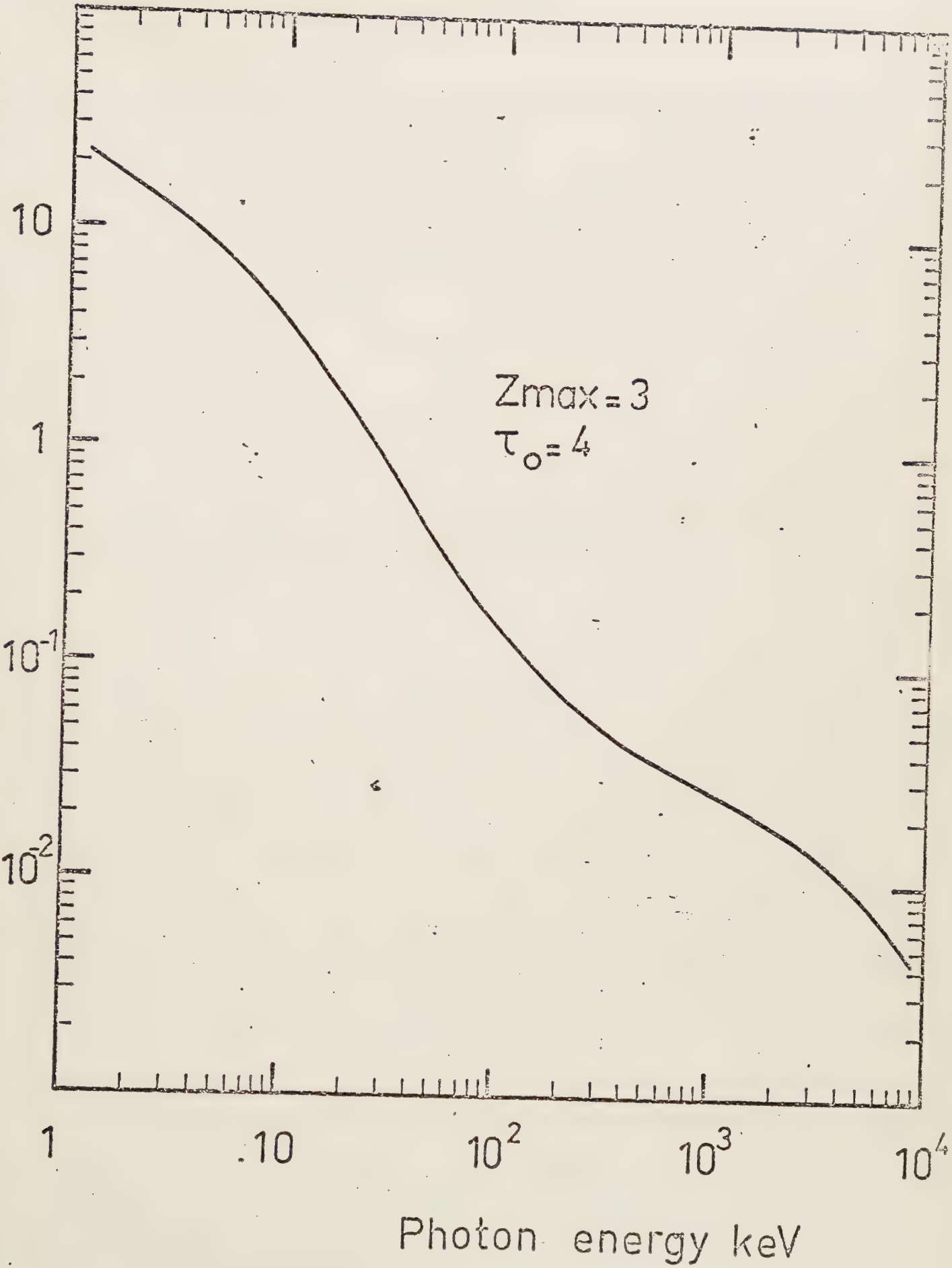

Energy spectrum J(E) keV.cm-2.s-1.ster-1.keV-1.
10
1
10-1
10-2
Zmax = 3
τo = 4
1
.10
10²
10³
10⁴
Photon energy keV

Fig.4

TROISIEME PARTIE

ETUDE DES SECTIONS EFFICACES DE REACTION PROTON-NOYAU A MOYENNE ET A HAUTE ENERGIE.

INTRODUCTION.

L'étude des sections efficaces de réaction proton-noyau est un moyen utile de perfectionner notre connaissance de la physique des noyaux : en particulier le problème du calcul de l'interaction effective entre le projectile (proton par exemple) et les nucléons de la cible n'est pas encore résolu de façon satisfaisante, des divergences importantes subsistant entre les résultats fournis par la théorie (par exemple, la théorie simplifiée de Goldberger) et les déterminations directes par un modèle phénoménologique:le modèle optique. D'autre part, ces sections efficaces ont une grande importance pratique dans plusieurs domaines de la physique, en particulier, dans l'étude de la propagation du rayonnement cosmique galactique. Cependant, les tentatives de systématiser les résultats expérimentaux dans ce domaine se heurtent aux difficultés suivantes : d'une part, on peut être tenté de n'utiliser que des modèles ultra-simples, car le modèle géométrique le plus simple fournit déjà une approximation utile, prévoyant en particulier la loi $\sigma \sim A^{2/3}$; cependant, les paramètres ainsi obtenus (rayon du noyau, opacité de la matière nucléaire dans le cas d'un noyau "gris") risquent d'être assez éloignés des valeurs physiques du fait même de la trop grande simplicité du modèle et par conséquent leur

détermination ne présente qu'un intérêt limité ; en particulier, ils ne peuvent guère être utilisés pour une extrapolation. D'autre part si on essaye de se rapprocher davantage de la réalité on doit tenir compte de l'existence d'une surface d'épaisseur finie, du fait que l'opacité peut être distribuée en surface ou en volume, et aussi de la réfraction et de la diffraction introduites par le puits de potentiel du noyau cible. Le nombre de paramètres libres introduits dans la théorie augmente ainsi considérablement, mais il n'est pas possible de les déterminer sans ambiguité, du fait même que la théorie plus simple fournissait déjà des fits acceptables et du fait du nombre relativement restreint de mesures précises disponibles. Une difficulté supplémentaire, liée à la théorie elle-même, est que l'interaction nucléon-nucléon est trop mal connue pour qu'on puisse calculer avec précision le libre parcours moyen d'un proton dans un noyau, en tenant compte des effets du principe d'exclusion de Pauli, qui réduisent considérablement la section de collision aux basses énergies.

Nous avons eu pour but de conduire cette étude en tenant compte des résultats expérimentaux sur la géométrie des noyaux – en particulier les rayons de charge déduits de la diffusion (e, e') – et en utilisant le modèle le plus simple possible dans chaque domaine d'énergie.

1) A haute énergie ($E \geqslant 100$ MeV), une étude semi-classique est suffisante, et l'effet de la répulsion coulombienne est représenté très simplement par un facteur $1 - \frac{V_c(R)}{E}$ – qui est le résultat exact en Mécanique Classique pour une sphère absorbante de rayon R. Nous avons obtenu des

résultats cohérents dans ce domaine d'énergie pour les rayons nucléaires et les opacités K, sans qu'il soit apparu nécessaire d'introduire une distribution d'opacités K(r) à bord diffus du type Woods-Saxon par exemple :

$$K(r) = \frac{K}{1 + e^{\frac{r - R_I}{a}}}$$

Nous avons donc supposé une distribution carrée, $K(r) = K\, Y(R_I - r)$, et la section efficace de réaction correspondante est la section de Bethe et Fernbach (Bethe, 1940 ; Fernbach, 1949).

$$(1) \qquad \sigma_R = \left(1 - \frac{V_c(R_I)}{E}\right) . \ \pi R_I^2 . (1-T)$$

où la"transparence" T est donnée par :

$$(2) \qquad \begin{cases} T = (1 - (1+v)\, e^{-v}) \ \frac{2}{v^2} \\ V = 2K\, R_I \end{cases}$$

La section "effective" nucléon-nucléon est $\sigma_{eff} = \sigma_{N-N}\, P(\zeta)$, où le facteur $P(\zeta)$ représente les corrections introduites par le principe de Pauli (voir Section II) ; l'opacité K est, par définition : $K = n\, \sigma_{eff}$, n étant la densité de nucléons.

Nous avons montré que les résultats de très haute énergie ($\geqslant$ 1 GeV) s'interprètent bien en admettant que le rayon d'interaction R_I est de la forme :

$$R_I = R_o + \Delta$$

où R_o est le rayon de demi-densité de charge (fixé expérimentalement), et Δ est une constante voisine de 1.1 F (1.1×10^{-13} cm).

Cependant, les mesures autour de 200 MeV, et plus

encore à 100 MeV, nécessitent l'hypothèse d'un Δ fonction croissante de la masse A de la cible. Nous avons pu représenter l'ensemble des données au-delà de 100 MeV avec la forme :

$$(3) \qquad \Delta = \Delta_o + \frac{q}{E} \left(\frac{N-Z}{A}\right)$$

où $\Delta_o = 1.1$ F et $q = 0.5$ GeV^{-2}.

Sur cette forme, on voit que Δ est une fonction de l'excès de neutron $\varepsilon \equiv \frac{N-Z}{A}$ plutôt qu'une fonction de la masse ; cependant les deux grandeurs sont évidemment liées pour les noyaux de la vallée de stabilité, pour lesquels on a approximativement d'après Hofstadter et al. (1967) :

$$(4) \qquad \varepsilon = \frac{0.015\ A^{2/3}}{2+0.015\ A^{2/3}}$$

Ces variations des rayons en fonction de l'énergie et du "nombre de symétrie" ε s'interprètent bien au moins qualitativement en tenant compte de la portée finie de l'interaction nucléaire. En effet, la loi définissant l'opacité : $K = n\ \sigma_{eff}$ n'a de sens que si l'échelle des variations de la densité n est grande par rapport à la portée δ de l'interaction ; ainsi, pour une distribution de densité carrée de rayon R_o cette loi prévoit une opacité nulle pour $r > R_o$, tandis qu'en réalité une collision reste possible jusqu'au paramètre d'impact $b = R_o + \delta$.

Dans le modèle le plus simple, où l'on assimile les nucléons à des sphères "dures" de rayon δ , on a évidemment

$\delta = \sqrt{\frac{\sigma_{eff}}{\pi}}$; à haute énergie $\sigma_{eff} \simeq 40$ mb, et par suite $\delta \simeq 1.1$ F : on retrouve ainsi la valeur de Δ_o qu'on avait obtenue directement par l'analyse des données. D'autre part, à plus basse énergie, la section efficace proton-neutron (σ_{pn}) devient plus grande que la section proton-proton (σ_{pp}) par un facteur 2 à 150 MeV et la portée δ de l'interaction est donc plus grande pour un noyau plus riche en neutron : d'où l'augmentation de Δ en fonction de $\frac{N-Z}{A}$.

Les rayons d'interactions étant fixés (eq. 1) les sections de réaction σ_R proton-noyau sont entièrement déterminées par la donnée de la section effective $\sigma_{eff}(E)$ en fonction de l'énergie. Nous obtenons respectivement, à 100 MeV, 200 MeV et 20 GeV : σ_{eff} = 35 mb, 30 mb et 47 mb ce qui est grossièrement en accord avec ce qu'une théorie élémentaire prévoit (en particulier, σ_{eff} est minimum vers 200 MeV) ; les σ_R ainsi calculés sont indiqués sur les fig. 1,2,3 avec les données expérimentales de Kirkby (100 MeV), de Johansson et de Renberg et al. ($\sim$ 200 MeV) et de Bellettini et al. (20 GeV) : on voit que l'accord est excellent.

Le cas des noyaux légers ($A < 12$) est un peu particulier, et sera étudié spécialement ; cependant,

on peut remarquer que notre paramétrisation reproduit bien les sections efficaces de ces noyaux à condition d'introduire les valeurs expérimentales des rayons nucléaires.

Il est important de noter que ces résultats seraient modifiés assez considérablement si l'on substituait au rayon géométrique R_I dans la formule de Bethe-Fernbach la quantité $R_I + \lambda\!\!\!^{-}$ comme l'ont fait de nombreux auteurs (Renberg 1972, Kirkby, 1966 ; Menet, 1971) ; cependant, l'introduction de la longueur d'onde $\lambda\!\!\!^{-}$ est incorrecte, et conduit à des résultats faux.

2) Aux énergies intermédiaires ($10 \text{ MeV} \leqslant E \leqslant 60 \text{ MeV}$), il devient nécessaire d'utiliser la Mécanique Quantique. Le modèle optique du noyau donne de bons résultats dans ce domaine d'énergies. A plus basse énergie, les réactions se font en proportion plus considérable par l'intermédiaire d'un noyau composé, et on observe des résonances : le modèle optique des réactions directes ne s'applique plus : d'ailleurs la barrière coulombienne devient assez grande pour réduire fortement la probabilité d'une réaction, sauf pour les noyaux légers.

Une des analyses les plus complètes des sections efficaces de réaction par le modèle optique est celle de Menet et al. (1972), entre 30 et 60 MeV. Cependant, la paramétrisation qu'il obtient est correcte surtout pour les noyaux moyens et lourds ($A \geqslant 40$) ; en particulier, les variations de la section du carbone entre 30 et 60 MeV sont très mal reproduites. D'autre part, les rayons sont supposés a priori de la forme $r_I A^{1/3}$ ($r_I \simeq 1.4$ F), et n'ont donc pas de signification physique claire ; ceci peut obscurcir considérablement l'interprétation physique des résultats, dans la mesure où une erreur sur le rayon est compensée

par une modification portant sur tous les autres paramètres définissant le potentiel imaginaire W(r). Ce genre de considération permet peut-être de comprendre pourquoi les opacités obtenues par le modèle optique sont beaucoup plus faibles que celles qu'on prévoyait dans la théorie de Goldberger (Section II).

Nous avons donc ré-analysé les résultats en introduisant une forme plus physique pour les rayons d'absorption, la même que nous avons déjà utilisée à haute énergie, soit :

$$R_I = R_o + \Delta_o + q \cdot \varepsilon$$

Nous avons introduit une épaisseur de surface a_I indépendante de l'énergie, contrairement à l'hypothèse de Menet, car une telle variation n'a pas de justification physique claire ; c'est d'ailleurs précisément du fait que le a_I de Menet devient très faible au-delà de 60 MeV que la section du Carbone devient aussi trop faible à ces énergies. Au contraire, les rayons R_I doivent varier en fonction de l'énergie, et même de façon considérable, comme l'a montré notre étude semi-classique des sections de réaction ; R_I varie ainsi pour le Plomb de 10.2 F à 30 MeV jusqu'à 7.6 F à 20 GeV ! On voit que l'hypothèse des rayons indépendants de l'énergie est très mauvaise.

I - Données expérimentales sur les rayons nucléaires.

Du fait de la validité au moins approchée du modèle géométrique pour le calcul des sections efficaces de réaction (σ_R), nous avons vu que la détermination exacte des rayons nucléaires joue un rôle primordial dans notre étude. Plusieurs méthodes, que nous discutons dans cette section, fournissent une détermination directe ou indirecte de ces rayons, mais la plus utile et celle qui donne les renseignements les plus précis est certainement l'étude de la diffusion d'électrons de haute énergie, effectuée en particulier à Stanford ; cette méthode est en effet capable de fournir des détails fins sur la distribution de la densité, et va au-delà d'une simple forme de Woods-Saxon à 2 paramètres R_o et a. Elle n'indique évidemment rien sur la distribution des neutrons. Cependant la théorie prévoit qu'elle doit être très voisine de celle des protons : $R_n - R_p \leqslant 0.2$ F (Beiner, 1969) ; ces résultats sont confirmés en particulier par l'étude de la diffusion des particules α (Brissaud et al. (1972)).

L'étude des niveaux des atomes μ mésiques fournit également des rayons de charge assez précis (quelques %). Une autre méthode utilise la détermination expérimentale des énergies coulombiennes des noyaux, et ne donne de bons résultats que pour les noyaux assez lourds ($A \geqslant 24$), l'effet étant proportionnel à Z^2; l'épaisseur de surface (a) ne peut être obtenue que pour les noyaux très lourds ($Z > 80$).

Une revue des données sur les rayons et les densités nucléaires a été effectuée par Hofstadter, Collard et Elton

(1967). Indiquons également dans "Annual Review of Nuclear Science" (1969) l'article de Nolen et Schiffer "Coulomb energies", et l'article "Muonic Atoms and nuclear structure" par Wu et Wilets.

Avant d'indiquer les divers résultats expérimentaux sur les densités des protons (n_p) et de neutrons (n_n), il convient de souligner que l'étude de ces grandeurs est particulièrement intéressante dans le cas de systèmes constitués de particules indépendantes, c'est à dire lorsque les corrélations sont négligeables ; en effet dans ce cas les densités d'ordre supérieur sont simplement les produits des densités simples :

$$n_{12}\ (\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (1-\frac{1}{A})\ n_1\ (\vec{r}_1)\ n_1\ (\vec{r}_2)\ ,\quad \text{etc...}$$

C'est précisément le cas des noyaux, qui peuvent être décrits en première approximation par un modèle de particules indépendantes : le modèle en couches.

Nous supposerons dans ce qui suit que la densité a la symétrie sphérique ; rappelons que les noyaux les plus déformés sont ceux dont les valeurs de N et Z sont le plus éloignées des nombres magiques.

1) Distributions de charges obtenues par la diffusion d'électrons.

a) Principe de la méthode, et application au cas d'une distribution de Fermi.

L'analyse de la diffusion d'électrons fournit

le carré du facteur de forme, c'est à dire de la transformée de Fourier de la distribution de charge $\rho_c(r)$. On détermine alors $\rho_c(r)$ en choisissant une forme fonctionnelle dépendant de plusieurs paramètres, qui sont alors fixés par une méthode d'optimisation. On utilise souvent la forme de Fermi :

$$\rho_c(r) = \frac{\rho_o}{1 + e^{\frac{r - c}{z}}}$$

qui a les propriétés suivantes :

- l'épaisseur sur laquelle ρ décroît de 90 % à 10 % de la valeur centrale ρ_o est : $t = 4z \text{ Log } 3 \simeq 4.40\ z$ ("skin thickness")
- lorsque ρ_c est normalisé à l'unité, ie $\int \rho_c(r)\, d_3 \vec{r} = 1$ la densité centrale vaut :

$$\rho_o = \frac{3}{4\pi (c^2 + \pi^2 z^2) c}$$

- C est le rayon de demi-densité ; on introduit souvent le rayon réduit $r_o = \frac{c}{A^{1/3}}$

- le rayon quadratique moyen est :

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} (c^2 + \frac{7}{3} \pi^2 z^2) = 0.6\ (c^2 + 1.1925\, t^2)$$

Le rayon équivalent $R^2_{eq} = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle$ vaut donc : $c^2 + 1.1925\, t^2$ (c'est le rayon de la distribution carrée qui a le même rayon quadratique moyen).

- le facteur de forme étant, à une constante multiplicative près :

$$F(q) = \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} \rho_c(r) \sin(qr)\, r\, dr$$

celui de la distribution de Fermi s'écrit :

$$F(q) = \frac{1}{q} \frac{d}{dq} \left[\frac{\sin(qc)}{\mathrm{sh}(\pi q z)} \right]$$

L'étude expérimentale a montré que les épaisseurs t ne variaient guère d'un noyau à l'autre, du moins pour les noyaux assez lourds ($A \geqslant 24$), comme on pouvait le prévoir du fait de la courte portée des forces nucléaires. La valeur obtenue pour t est (Hofstadter, Collard et Elton, "Nuclear radii", 1967) :

$$t = 2.30\ F \pm 0.12\ F$$

ou $z = 0.523\ F$

De la même façon la densité centrale de nucléons $A\,\rho_o$ est pratiquement la même pour tous les noyaux sauf peut être pour le Lithium, qui n'est pas encore saturé. On obtient :

$$A\,\rho_o = 0.170 \text{ nucléon/F}^3$$

Le rayon de la sphère occupée par un nucléon de la région centrale est donc :

$$1 = \left(\frac{4\pi}{3} A\,\rho_o \right)^{-1/3} = 1.120\ F$$

b) <u>Forme générale du rayon en fonction de la masse pour les noyaux saturés.</u>

La constatation expérimentale du phénomène de saturation (l et t constants) a conduit Elton (1962) a indiquer une forme analytique R(A) du rayon en fonction de la masse. Dans le cas le plus général, on peut en donner la démonstration suivante.

Les hypothèses faites impliquent une densité de la forme :

$$\rho(r, R_o) = \rho_o \, f(r - R_o)$$

avec : $f(-R_o) = f(-\infty) = +1$

Définissant : $F(R_o) = 3 \int_o^{+\infty} f(r - R_o) r^2 \, dr$, la normalisation de la densité s'écrit :

$$\rho_o = \frac{3A}{4\pi F(R_o)}$$

Introduisant les coefficients $\gamma_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) - Y(-t)\, t^n \, dt$, on voit facilement que $F(R_o)$ s'exprime de la façon la plus générale sous la forme d'un polynôme du 3ème degré :

$$F(R_o) \equiv \frac{R_o^3}{3} + \gamma_o R_o^2 + 2 \gamma_1 R_o + \gamma_2.$$

La fonction $R_o(A)$ est finalement définie sous forme implicite par :

$$(5) \quad \frac{R_o^3}{3} + \gamma_o R_o^2 + 2 \gamma_1 R_o + \gamma_2 = \frac{l^3 A}{3}$$

Pour un noyau à "surface symétrique" par rapport au point de

demi-densité - c'est à dire lorsque $f(-t) \equiv 1-f(t)$ - la fonction $F(R_o)$ est impaire, et il reste :

$$- R_o^3 + 6 \gamma_1 R_o - 1^3 A = 0$$

C'est le cas en particulier de la densité de Fermi, pour laquelle on obtient : $\gamma_1 = \frac{\pi^2 z^2}{6}$

Notons que la forme (5) est valable pour n'importe quel type de rayon équivalent (rayon de demi-densité, rayon équivalent, etc...)

Elton (1962) a calculé $C(A)$ et $R_{eq}(A)$ pour une distribution de Fermi, sous la forme de développements limités :

$$(6)\begin{cases} C = 1A^{1/3} - \frac{\pi^2 z^2}{3\ 1A^{1/3}} + \frac{\pi^5 z^5}{81\ 1^5 A^{5/3}} + \cdots = 1.120\ A^{1/3} - \frac{0.8036}{A^{1/3}} \\ R_{eq} = 1A^{1/3} + \frac{5\pi^2 z^2}{6\ 1A^{1/3}} - \frac{7\pi^4 z^4}{24\ 1^3 A} + \cdots = 1.120\ A^{1/3} + \frac{2.009}{A^{1/3}} - \frac{1.513}{A} \end{cases}$$

Ces résultats concordent bien avec les formules empiriques suivantes (Hofstadter et al. (1967) :

$$(7)\begin{cases} C = 1.18\ A^{1/3} - 0.48 \\ R_{eq} = 1.06\ A^{1/3} + 0.75 \end{cases}$$

Les formules semi-théoriques (6) sont correctes pour $A \geqslant 24$, et les formules empiriques (7) pour $A \geqslant 9$; en dessous

de la masse 9, les rayons présentent de grandes fluctuations en fonction de A.

c) Résultats.

- La première étape dans la détermination des rayons par la diffusion d'électrons a été le travail de Hahn, Ravenhall et Hofstadter (1956), qui proposent une distribution de Fermi

$$\rho_c = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r - r_o A^{1/3}}{z}\right)}$$

avec $r_o = 1.07 \pm 0.02$ F, $z = 0.55 \pm 0.07$ F, ce qui correspond à $t = 2.4$ F.

- Elton, dans "Nuclear Sizes" Oxford, 1962) donne les paramètres de la distribution de Fermi pour un grand nombre de noyaux depuis He^4 jusqu'à Bi^{209}. Il obtient : $1 = 1.123$ F, $t = 2.49$ F.

- Une nouvelle revue des rayons nucléaires est effectuée en 1967 par Hofstadter, Collard et Elton ("Nuclear Radii", 1967), qui ont rassemblé les mesures effectuées sur 44 noyaux depuis H^3 jusqu'à Bi^{209}. Nous avons déjà indiqué leur résultat : $1 = 1.120$ F, $t = 2.3 \pm 0.1$ F.

Les résultats ainsi obtenus sont en accord avec les prévisions théoriques du modèle en couches ; il est nécessaire dans ces calculs d'utiliser un puits de potentiel nucléaire à bord diffus (Woods-Saxon) plutôt qu'un puits parabolique, trop peu réaliste. Il est également nécessaire, surtout pour les

noyaux très légers comme le deutérium, de tenir compte de l'extension finie de la distribution de charge du proton : son rayon quadratique moyen est environ 0.8 F (Voir : "Nuclear and nucleon structure" ed. Hofstadter - Benjamin, N.Y., 1963, voir également Elton "Nuclear sizes" - Oxford, 1962).

Elton et Swift (1967) ont ainsi calculé les densités de charge d'un grand nombre de noyaux, de Li^6 à Ca^{48} ; les rayons calculés coïncident à 3 % près avec ceux qu'on déduit de l'analyse phénoménologique avec distribution de Fermi.

d) Effet de la distribution de charge du proton.

La distribution de charge du proton peut être représentée par une exponentielle ou une gaussienne dont le rayon quadratique moyen est $\langle r^2 \rangle^{1/2} \equiv u = 0.80$ F. La distribution de charge qu'on mesure, ρ_c, a donc une extension plus large que la distribution de protons n_p ; son facteur de forme est le produit de celui du proton par celui de la densité n_p, et il en résulte la relation d'additivité des rayons quadratiques.

$$\langle r_c^2 \rangle = \langle r_p^2 \rangle + u^2$$

La relation s'écrit pour les rayons équivalents :

$$R_c^2 = R_p^2 + \frac{5}{3} u^2 \simeq R_p^2 + 1.07 \text{ F}^2 .$$

Cet effet est surtout important pour les noyaux très légers, comme le deutérium, pour lequel on a $R_c = 2.80 \pm 0.06$ F et par suite $R_p \simeq 2.60$ F. Pour les noyaux plus lourds, on a approximativement : $R_c - R_p \simeq \frac{0.4}{A^{1/3}}$

2) Distribution des neutrons et densité de matière.

La détermination de la densité de neutrons (n_n) est nettement plus compliquée que celle de la charge, car on ne peut plus utiliser la diffusion (e,e') : il faut passer par l'intermédiaire de la diffusion de protons ou de particules α , et le problème se complique du fait de l'introduction de l'interaction forte, qui est relativement mal connue.

a) Diffusion (α, α')

Brissaud et al. (1972) ont étudié la diffusion de particules α de 166 MeV, en introduisant une interaction effective nucléon- α :

$$V_{N\alpha} = V_o \; e^{-r^2/\mu^2}$$

avec $V_o = -37$ MeV, $\mu = 2$ F

Ils introduisent un facteur de normalisation u pour tenir compte des termes d'échange, et obtiennent le potentiel optique sous la forme :

$$V(r_\alpha) = u \int_o^{+\infty} \rho_m (r) \; V_{N\alpha} \; (|\vec{r} - \vec{r_\alpha}|) \; d_3 \; \vec{r}$$

où $\rho_m = \rho_p + \rho_n$ est la densité de matière ; $u = 0.7$ à l'énergie considérée (166 MeV).

Admettant une épaisseur de surface t identique pour les neutrons et les protons, ce qui est conforme aux résultats des calculs de Hartee.Fok, ils obtiennent les rayons quadratiques

moyens $\langle r_m^2 \rangle^{1/2}$ de la densité de matière pour 25 noyaux, de C^{12} jusqu'à Pb^{208} en passant par les séries isotopiques $Ca^{40-44-48}$, $Ni^{58-60-62}$, Zr^{90-94}, $Sn^{116-118-120-124}$.

Les valeurs ainsi obtenues sont en bon accord avec les calculs de modèle en couches de Beiner ("Intern. Course on Nucl. Theory", Trieste, 1969). Notons que la méthode des déplacements Coulombiens (Nolen and Schiffer, 1969) ne donne pas des résultats concordants.

L'écart R_n-R_p des rayons des densités de neutrons et de protons reste toujours faible, et varie de - 0.1 F à + 0.3 F au maximum. Brissaud et al. indiquent les règles suivantes pour les variations de R_n-R_p :

- la quantité R_n-R_p est toujours négative pour les noyaux symétriques (Z = N) du fait de la répulsion coulombienne.

- pour une série isotopique R_p augmente généralement quand N croît, à cause de l'interaction forte entre protons et neutrons. Dans le cas de Ce^{140} et de Pb^{208}, on voit simultanément l'effet de répulsion coulombienne et l'effet de l'attraction entre protons et neutrons : les 82 neutrons de Ce^{140} ont un rayon très inférieur à celui des 82 protons de Pb 208 ($\langle r^2 \rangle^{1/2}$ = 4.9 F et 5.44 F respectivement).

- dans chaque série isotopique étudiée, le rayon R_n croît plus vite que $A^{1/3}$. Cet effet a une grande importance pour les sections efficaces de réaction, et permet de comprendre pourquoi les sections proton-noyau par exemple augmentent rapidement lorsque N croît.

- en moyenne, c'est à dire le long de la vallée de stabilité,

les rayons de matière (r m s) sont bien représentés par la formule :

$$\langle r^2 \rangle_m^{1/2} = (0.86 \pm 0.01)\, A^{1/3} + (0.47 \pm 0.05)$$

b) Diffusion (p, p')

On peut également étudier la distribution de matière à partir du potentiel optique déterminé par la diffusion (p, p') . L'interaction est cependant plus compliquée et fait intervenir un plus grand nombre de paramètres (Voir Greenlees (1968), Hnidzo(1971)).

c) Calculs de modèle en couches.

Comme on l'a vu plus haut, les calculs de modèle en couches de Beiner (1969) donnent des rayons de neutrons en excellent accord avec les résultats de Brissaud (dans la limite des incertitudes, qui sont environ de 0.1 F). Il peut donc être utile de représenter les résultats de Beiner par une formule empirique ; nous avons obtenu la forme bilinéaire suivante, qui représente les résultats de Beiner à 0.01 F près (sauf pour O^{16}, pour lequel l'écart est de 0.02 F) :

$$R_n - R_p = (1.71 + 0.0090\ Z)\left(\frac{N-Z}{A}\right) - (0.00352\ Z - 0.0127)$$

II - Interaction effective nucléon-nucléon. Théorie de Goldberger.

1) Notions sur les sections efficaces nucléon-nucléon.

Les sections efficaces totales nucléon-nucléon se caractérisent par une décroissance rapide en fonction de l'énergie, suivie d'un plateau à haute énergie ($E \geqslant 100$ MeV) (Fig. 1). La section proton-neutron (σ_{pn}) est plus grande que la section proton-proton (σ_{pp}), par un facteur de l'ordre de 3 entre 2 et 100 MeV, cependant la différence devient négligeable au delà de quelques GeV.

Metropolis (1958) a obtenu la formule empirique suivante, correcte à 6 % près entre 25 et 300 MeV :

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma_{pp} = \dfrac{10.63}{\beta^2} - \dfrac{29.92}{\beta} + 42.9 \quad \text{mb} \\ \sigma_{np} = \dfrac{34.10}{\beta^2} - \dfrac{82.2}{\beta} + 82.2 \quad \text{mb} \end{cases}$$

où β est la vitesse du nucléon incident divisée par la vitesse de la lumière.

La diffusion est purement élastique jusqu'à 400 MeV environ, énergie au-delà de laquelle la production de pions devient possible.

2) Théorie de Goldberger des sections de réaction proton-noyau.

Un noyau peut être représenté en première approximation comme un puits de potentiel de profondeur V (V est éventuellement une fonction V(r) du rayon) dans lequel les nucléons s'entassent jusqu'à un certain niveau E_F, le niveau de Fermi : c'est ce

qu'on appelle le modèle en couches du noyau. On sait que la densité est liée à l'énergie de Fermi E_F par :

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{2} \pi^2 n \right)^{2/3}$$

et, d'après la discussion précédente des rayons nucléaires, on voit que l'énergie de Fermi est voisine de 40 MeV.

La différence $V - E_F = S$ est l'énergie de séparation du nucléon le moins lié et vaut environ 8 MeV, sauf pour les noyaux très légers ; on en déduit la profondeur du puits : $V \sim 50$ MeV. Il faut noter que cette théorie n'est strictement correcte que pour des noyaux très lourds, puisqu'elle ne tient pas compte de l'énergie de séparation des couches successives.

Le succès du modèle en couches ayant montré que les nucléons du noyau se comportent pratiquement comme des particules indépendantes, on peut définir une "opacité" de la matière nucléaire sous la forme :

$$K = n \sigma$$

où σ est la section efficace de collision d'un nucléon de la cible sur le projectile (proton).

Cependant, la section efficace σ qui intervient ici n'est pas la section efficace nucléon-nucléon libres : en effet, de nombreux canaux de diffusion élastique sont bouchés pour le nucléon de la cible, qui ne peut être diffusé que vers les états

au-dessus du niveau de Fermi. La section efficace effective s'écrit donc :

$$\sigma_{eff} = \sigma_o \cdot P$$

où σ_o est la section nucléon-nucléon libres et le facteur correctif P tient compte des contraintes imposées par le principe d'exclusion de Pauli. On montre que P est une fonction de la variable $\frac{E_F}{E + |V|}$; Goldberger (1948) a calculé cette fonction dans le cas où σ_o est indépendant de l'énergie ; soit :

$$P = P_A(\zeta) \equiv \begin{cases} 1 - \frac{7}{5}\zeta & \text{si} \quad \zeta < \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{7}{5}\zeta + \frac{2}{5}\zeta \left(2 - \frac{1}{\zeta}\right)^{5/2} & \text{si} \quad \zeta > \frac{1}{2} \end{cases}$$

En dessous de 100 MeV, il est plus correct d'admettre que σ_o varie en raison inverse de l'énergie ; le calcul de $P(\zeta)$ est plus compliqué dans ce cas, et on obtient (Clementel et Villi, 1955 ; Hayakawa, 1955) :

$$P = P_B(\zeta) \equiv \frac{3}{(2\zeta)^{3/2}} \int_a^{\sqrt{\zeta}} \frac{t(1+t^2-2\zeta)}{\sqrt{1+t^2}} \operatorname{Argth}\left(\frac{2t\sqrt{2(1+t^2)}}{1+3t^2}\right) dt$$

et la borne d'intégration a est définie par :

$$\begin{cases} a = 0 & \text{si} \quad \zeta < \frac{1}{2} \\ a = \sqrt{2\zeta - 1} & \text{si} \quad \zeta > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nous avons représenté ces fonctions $P_A(\zeta)$ et $P_B(\zeta)$ sur la Fig. 2 (d'après Kikuchi, 1968).

Ayant ainsi déterminé la section effective et l'opacité $K = n\,\sigma_{eff}$, on en déduit immédiatement la section de réaction σ_R par la formule de Bethe-Fernbach.

3) Opacités prévues par la théorie de Goldberger.

Nous avons calculé les opacités K entre 0 et 100 MeV pour diverses valeurs de la densité n, ou, ce qui revient au même, de l'énergie de Fermi E_F (fig. 3). On voit que pour une énergie de Fermi réaliste (40 MeV), l'opacité croît régulièrement lorsque l'énergie varie de 0 à 60 MeV, puis se stabilise à une valeur voisine 0.42 F^{-1} ; or, on observe en réalité que les sections de réaction σ_R passent par un maximum vers 20 ou 30 MeV et décroissent ensuite jusqu'à 100 MeV où elles atteignent un plateau, et l'opacité que nous avons tirée de l'analyse des observations à 100 MeV est de 0.27 F^{-1} au lieu de 0.42 F^{-1} (voir Section III) : c'est le comportement de la courbe d'opacité de la figure 3 pour une énergie de Fermi $E_F \sim 20$ MeV.

Néanmoins la contradiction entre les prévisions et l'analyse phénoménologique n'est peut être qu'apparente car nous n'avons pas tenu compte des effets de surface qui sont extrêmement importants : on peut en tenir compte de façon approchée en introduisant une énergie de Fermi dépendant de la distance au centre :

$$E_F(r) = \left| V(r) \right| - S$$

qui décroît par conséquent de la valeur centrale $E_{Fo} \simeq$ 40 MeV jusqu'à 0 au bord extrême du noyau. On en déduit la dépendance radiale de l'opacité K(r), qui se calcule exactement comme dans le cas du puits carré (eq. 10, 11, 12, 13), ou qu'on peut déterminer graphiquement à l'aide de la figure 3. Il faut cependant remarquer que cette approximation n'est strictement correcte que si la densité varie peu sur une distance d'une longueur d'onde de Fermi, ce qui est loin d'être le cas ; la méthode donne cependant des indications utiles.

On s'attend donc à obtenir de cette façon des opacités moyennes correspondant à une énergie de Fermi "moyenne", intermédiaire entre 0 et la valeur centrale, 40 MeV. Il est d'ailleurs intéressant de constater que si l'on prend comme rayon du noyau les rayons déduits de notre analyse phénoménologique (Section III), l'énergie de Fermi correspondante est de 23 MeV, correspondant à une opacité de 0.24 F^{-1} en bon accord avec celle que nous avons obtenue (0.27 F^{-1}).

En ce qui concerne la forme des variations de K(r) dans ce modèle de Goldberger avec "densité variable", il est immédiatement apparent sur la figure 3 que K(r) décroît régulièrement du centre vers la surface lorsque l'énergie est supérieure à 30 MeV ; au-dessous de 20 MeV, K(r) a un maximum prononcé à la surface. Ce résultat est confirmé par l'étude de la diffusion élastique par le modèle optique, qui a montré que l'absorption est très concentrée à la surface à basse énergie (Becchetti et al. 1969). Il faut signaler que les opacités prévues par le modèle optique dans la région centrale du noyau (absorption dite "de volume") sont en moyenne 3 fois plus faibles

que celles prévues par la théorie de Goldberger ; mais le modèle optique ne peut donner que des indications peu précises sur l'opacité, et cette divergence s'explique peut-être par le choix d'une mauvaise paramétrisation, en particulier pour les rayons d'absorption; nous reviendrons sur cette question en Section IV.

4) Calcul des rayons d'absorption

Nous avons calculé l'opacité K(r) pour Sn^{120}, ainsi que la partie imaginaire du potentiel optique qui lui correspond :

$$W(r) = K(r) \cdot \frac{v(r)}{2}$$

dans les deux cas suivants :

1er cas : $C_p = 5.20$ F , $C_n = 5.40$ F , $z = 0.523$ F

2e cas : $C_p = 5.20$ F , $C_n = 5.60$ F , $z = 0.523$ F

de façon à étudier l'influence des variations du rayon de demi-densité des neutrons, C_n. Nous avons ensuite représenté le W(r) obtenu par une forme de Woods-Saxon à 4 paramètres, contenant une absorption de volume et de surface (W_o, W_d, R_I, a_I) : on obtient ainsi le rayon d'absorption R_I, qui est le paramètre qui nous intéresse ici.

Les résultats, pour les énergies E = 30 et 60 MeV, sont indiqués dans le Tableau I :(on a fixé $a_I = 0.63$ F, d'après les résultats de Bechetti (1969)).

Tableau I

C_n \ E	30	60
5.40	5.55	5.17
5.60	5.70	5.31

On voit que le rayon d'absorption R_I suit approximativement les variations du rayon des neutrons C_n : lorsque C_n augmente de 0.2 F, R_I augmente en effet de 0.15 F.

L'effet le plus important est cependant l'effet des variations d'énergie : le rayon R_I augmente de 0.4 F lorsqu'on passe d'une énergie de 60 MeV à 30 MeV.

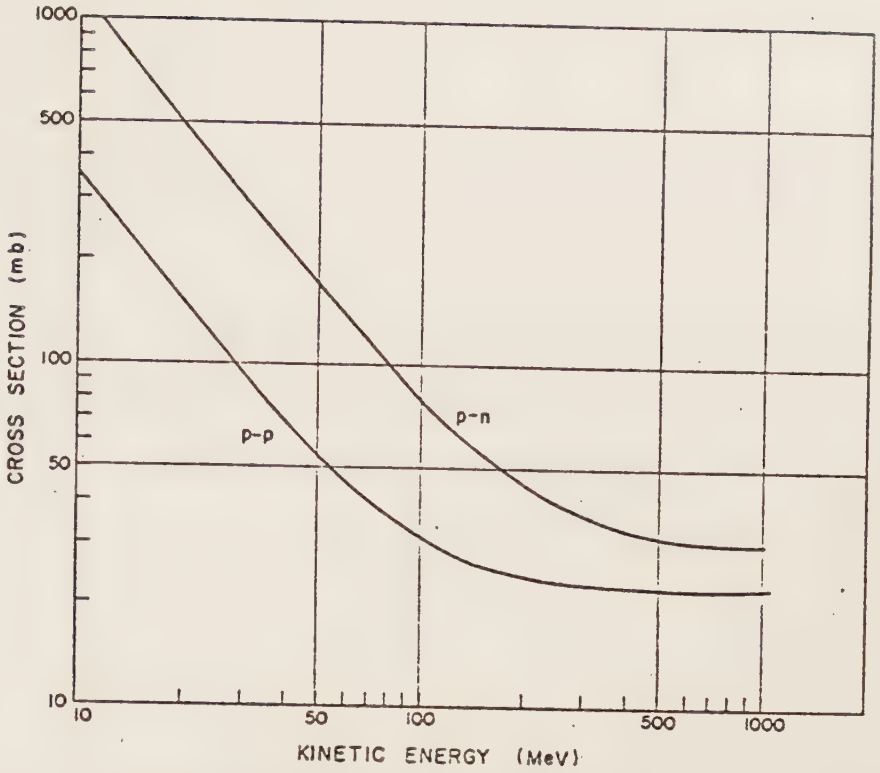
En conclusion, la théorie de Goldberger prévoit des variations du rayon d'absorption R_I en fonction de l'énergie loin d'être négligeables et qui doivent s'ajouter à l'effet de la portée finie de l'interaction nucléon-nucléon, dont nous avons déjà parlé en Section I.

Légende des figures

Fig. 1 : Sections efficaces totales nucléon-nucléon (σ_{pp} et σ_{pn}) en fonction de l'énergie, d'après Kikuchi et Kawai (1968).

Fig. 2 : Facteurs correctifs $P(\zeta)$ permettant le calcul de la section effective, $\sigma_{eff} = P(\zeta)\ \sigma_{NN}$. Ce facteur représente les corrections dues au principe de Pauli, et le paramètre ζ vaut : $E_F/(E+|V|)$, où V est la profondeur du potentiel nucléaire.

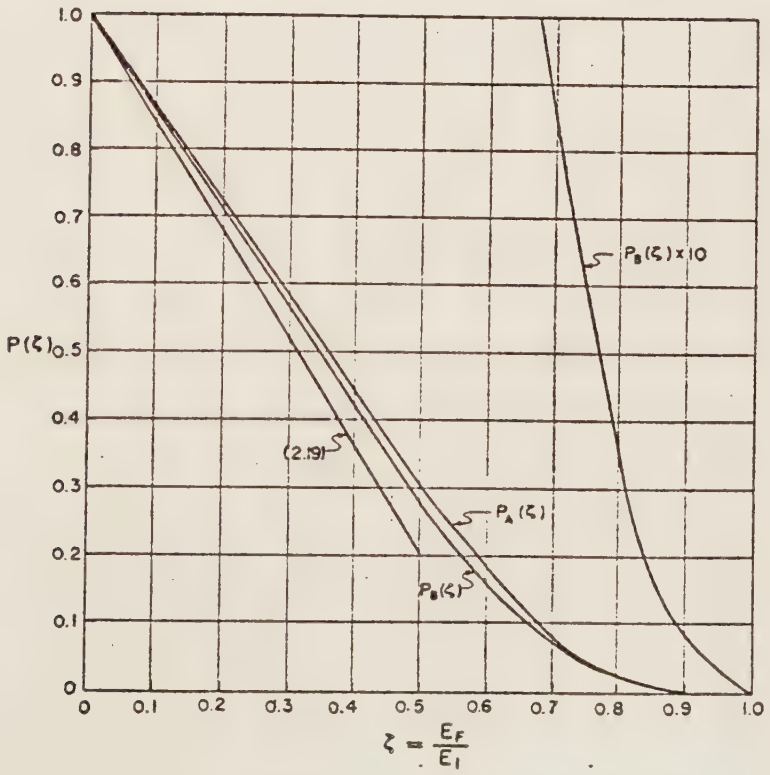
Fig. 3 : Opacité de la matière nucléaire pour des nucléons incidents, en fonction de l'énergie. Nous avons tracé les courbes correspondant à diverses valeurs de l'énergie de Fermi E_F, de 14 à 40 MeV.



Total elastic neutron-proton and proton-proton scattering cross sections as a function of laboratory energy.

Fig. 1

(d'après Kikuchi , 1968)



The ratio $P(\zeta) = \bar{\sigma}/\sigma_f$, defined by (2.13), as a function of energy $\zeta = E_F/E_1$. $\bar{\sigma}$ and σ_f are the nucleon-nucleon collision cross sections in nuclear matter and in free space, respectively. E_F is the Fermi energy and E_1 is the kinetic energy of an incoming nucleon, measured from the bottom of the Fermi sea. Suffices A and B refer to the approximations (A) and (B) respectively. (2.19) indicates the result by the approximate formula (2.19) in the text.

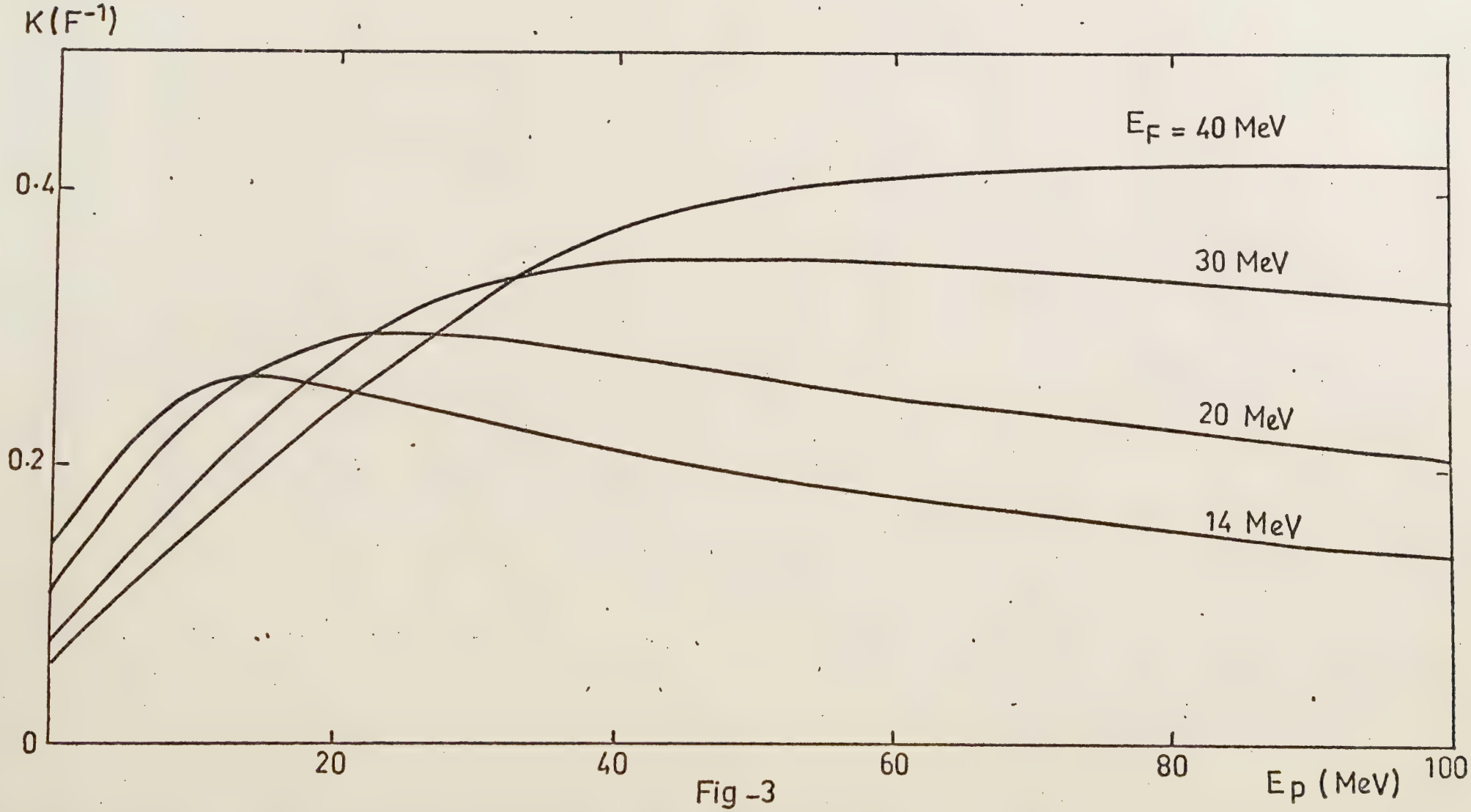


Fig -3

III - Analyse semi-classique des sections de réaction à haute énergie.

Comme on l'a indiqué en Section I, cette étude des résultats expérimentaux a été conduite dans l'hypothèse d'un puits carré d'absorption : $K(r) = K \cdot Y(R_I - r)$ ce qui conduit à la forme de Bethe-Fernbach pour la section efficace :

$$\sigma_R = \pi R^2 \left[1 - \frac{2}{v^2} \left(1 - (1 + v)\, e^{-v} \right) \right]$$

Nous avons également essayé une opacité K(r) à bord diffus, du type Woods-Saxon, mais cela ne fait qu'introduire un paramètre libre supplémentaire et complique les calculs sans améliorer la qualité des fits ; nous sommes donc revenus à la forme de Bethe-Fernbach.

Les résultats expérimentaux que nous avons analysés sont les suivants :

- les mesures de Kirkby et Link (1966) à 100 MeV, qui sont très complètes puisqu'elles portent sur 41 éléments, depuis le Béryllium jusqu'à l'Uranium.

- les mesures de Johansson et al. (1961) à 180 MeV, portant sur 8 éléments, dont 2 éléments légers (Li, Be, C, Al, Ca, Fe, In, Au). Cette énergie présente l'intérêt d'être voisine du minimum des sections de réaction en fonction de l'énergie. Précision : 2 ou 3 %.

- les résultats de Renberg et al. (1972) entre 220 et 570 MeV, avec une précision de 3 %, d'après les auteurs.

- enfin, à 20 GeV, les mesures de Bellettini et al. (1966)

sur 8 noyaux, dont 3 noyaux légers (Li^6, Li^7, Be^9, C^{12}, Al^{27}, Cu, Pb, U).

Indiquons également les mesures plus anciennes effectuées par Cassels et Lawson (1953) à 134 MeV, sur C, Al, Cu, Cd et Pb.

1) Etude préliminaire.

Un certain nombre de ces auteurs présentent une analyse de leurs propres résultats par la formule de Bethe-Fernbach (Cassels et Lawson, Renberg et al., Kirkby et Link, Menet et al. (1971)), mais presque tous utilisent une forme incorrecte dans laquelle le facteur géométrique πR^2 est remplacé par $\pi (R + \lambda\!\!\!^{-})^2$; les résultats sur les rayons et les opacités s'en trouvent faussés.

Nous avons vérifié numériquement que l'usage du facteur géométrique πR^2 dans la formule de Bethe-Fernbach conduit à des résultats très précis à partir de 100 MeV, l'écart par rapport au résultat quantique exact étant inférieur à 2 % ; l'erreur atteint au contraire 35 % pour un noyau léger comme Be^9 (9 % pour le Plomb) si on utile la forme $\pi (R + \lambda\!\!\!^{-})^2$.

D'autre part, ces auteurs utilisent la forme : $R = r_o A^{1/3}$ ou $r_o A^{1/3} + \Delta$ qui ne se justifie pas d'après ce que nous savons des rayons nucléaires (voir Section I) : les valeurs de r_o varient en effet de 1.3 (Renberg et al. ; Cassels and Lawson) à 1.47 (Kirkby et Link), au lieu de la valeur 1.1 déduite de l'étude des distributions de charge.

Nous avons donc essayé de représenter les résultats à l'aide de rayons R_I directement reliés aux rayons de charge

expérimentaux (R_o), soit :

$$R_I = R_o + \Delta$$

où Δ est une constante.

On obtient ainsi un bon fit des résultats à 20 GeV avec : Δ = 1.1 F ; cependant, les résultats vers 200 MeV sont mieux représentés avec $\Delta \sim 1.5$ F et le fit devient un peu moins bon, principalement à cause de la valeur élevée de la section mesurée pour le Plomb ; enfin, le même calcul à 100 MeV donne un résultat encore plus mauvais pour les éléments lourds (Plomb) quelle que soit la valeur choisie pour Δ .

On pourrait penser améliorer la situation en introduisant une opacité K(r) à bord diffus : en fait, la situation n'est pas changée.

On ne peut donc pas échapper à la nécessité d'augmenter l'écart Δ pour les éléments lourds. Ce résultat était qualitativement prévisible dans la mesure où la section proton-neutron (σ_{pn}) devient grande par rapport à σ_{pp} en dessous de 100 MeV : un écart Δ du type $\Delta = \Delta_o + Q.(\frac{N - Z}{A})$ est donc naturel ; il est cependant remarquable que cet effet se manifeste à des énergies aussi élevées (100 MeV et 200 MeV).

2) Résultats :

Nous avons donc une forme à 3 paramètres (σ_{eff}, Δ_o, Q) pour représenter l'ensemble des sections de réaction à une énergie donnée ; rappelons que nous avons supposé une opacité homogène dans le noyau :

$$K = \frac{3\ A}{4\ \pi\ R_I^3} \cdot \sigma_{eff}$$

a) Données à 20 GeV (Bellettini et al.).

On supposera : Q = 0 car $\sigma_{pp} = \sigma_{pn}$ à très haute énergie.

Bellettini et al. indiquent, outre les sections de réaction σ_R, une valeur de la transparence T du noyau déduite directement de leurs mesures de diffusion élastique. On obtient un bon fit des sections efficaces (fig. 2) et une bonne représentation des transparences (fig. 1) avec les paramètres :

$$\sigma_{eff} = 47 \text{ mb}, \qquad \Delta = 1.1 \text{ F}$$

b) Données à 200 MeV (Renberg et al., Johansson et al.).

Conservant la valeur $\Delta_o = 1.1$ F, on obtient un très bon accord avec les données (fig. 3) pour :

$$\sigma_{eff} = 30 \text{ mb}, \quad Q = 2.4$$

c) Résultats de Kirkby à 100 MeV :

On obtient un excellent accord avec ces données (fig. 4) en conservant $\Delta_o = 1.1$ F et en choisissant :

$$\sigma_{eff} = 35 \text{ mb}, \qquad Q = 5.2$$

d) Conclusion.

Il est possible de représenter l'ensemble des sections

de réaction à haute énergie ($E \geqslant 100$ MeV) par la formule de Bethe-Fernbach, en choisissant des rayons d'absorption de la forme :

$$\Delta = 1.1 + \frac{0.5}{E(GeV)} \cdot \frac{N-Z}{A}$$

Les sections effectives à 100 MeV, 200 MeV et 20 GeV sont alors respectivement : 35, 29 et 47 mb. La valeur la plus faible de σ_{eff} correspond à l'énergie E = 200 MeV, comme il est normal. Nous avons représenté sur la figure **5** les variations de σ_{eff} au-delà de 100 MeV, en utilisant les 3 valeurs ci-dessus et en interpolant d'après la forme des courbes σ_{pp} et $\sigma_{pn}(E)$.

Remarquons que ces valeurs des sections effectives sont très comparables à celles que prévoit la théorie de Goldberger : respectivement 25 mb, 25 mb et 40 mb environ.

Nous avons représenté sur la figure **6** les rayons d'absorption R_I en fonction de $A^{1/3}$ pour les diverses énergies étudiées. Nous avons inclus également, pour comparaison, les rayons qu'on obtient à 30 MeV d'après les mesures de σ_R de Menet (1971) : on a supposé les noyaux totalement absorbants, ce qui est certainement une bonne approximation à cette énergie. A 30 MeV, l'effet d'augmentation de Δ en fonction de (N-Z)/A devient évident et confirme les résultats obtenus à plus haute énergie.

La paramétrisation que nous avons obtenue fournit en principe les sections de réaction des éléments plus lourds que le Carbone ($A \geqslant 12$). Les éléments plus légers ont des rayons

variant irrégulièrement en fonction de A et on doit introduire leurs rayons de charge expérimentaux R_o plutôt qu'une formule du type $1.18\ A^{1/3} - 0.48$ (Hofstadter, 1967).

Légende des figures

Fig. 1 et 2 : Analyse semi-classique des données de Bellettini et al. à 20 GeV. Les figures 1 et 2 montrent respectivement les transparences T et les sections efficaces σ_R en fonction de $A^{2/3}$; les courbes en traits pleins représentent notre calcul, avec les paramètres : $\sigma_{eff} = 47$ mb , $\Delta = 1.1$ F . Rappelons que les rayons d'absorption sont supposés de la forme : $R_I = R_o + \Delta$, avec : $R_o = 1.18\ A^{1/3} - 0.48$.

Fig. 3 : Analyse semi-classique des résultats de Renberg et de Johansson vers 200 MeV. Les courbes tracées correspondent à : $\sigma_{eff} = 30$ mb , $\Delta = 1.1 + 2.5\ \varepsilon$.

Fig. 4 : Analyse des résultats de Kirkby à 100 MeV ; $\sigma_{eff} = 35$ mb , $\Delta = 1.1 + 5.\ \varepsilon$.

Fig. 5 : Section effective σ_{eff} en fonction de l'énergie, au-delà de 100 MeV. Seuls les points à 100 MeV , 200 MeV et 20 GeV ont été réellement déterminés ; la courbe joignant ces points a été tracée en tenant compte de la forme des sections efficaces nucléon-nucléon libre dans ce domaine d'énergie.

Fig. 6 : Rayons d'absorption en fonction de la masse ($A^{1/3}$) à diverses énergies. On a porté en ordonnées la différence $\Delta \equiv R_I - R_{ch}$ du rayon d'absorption et du rayon de charge. Les courbes tracées pour $E \geqslant 100$ MeV représentent notre résultat, $\Delta = 1.1 + 0.5$ GeV / $E * \varepsilon$. La courbe en tirets (E=30 MeV) joint simplement les points ($\times$) obtenus à partir des résultats expérimentaux de Menet (1971) dans l'hypothèse d'un noyau parfaitement absorbant.

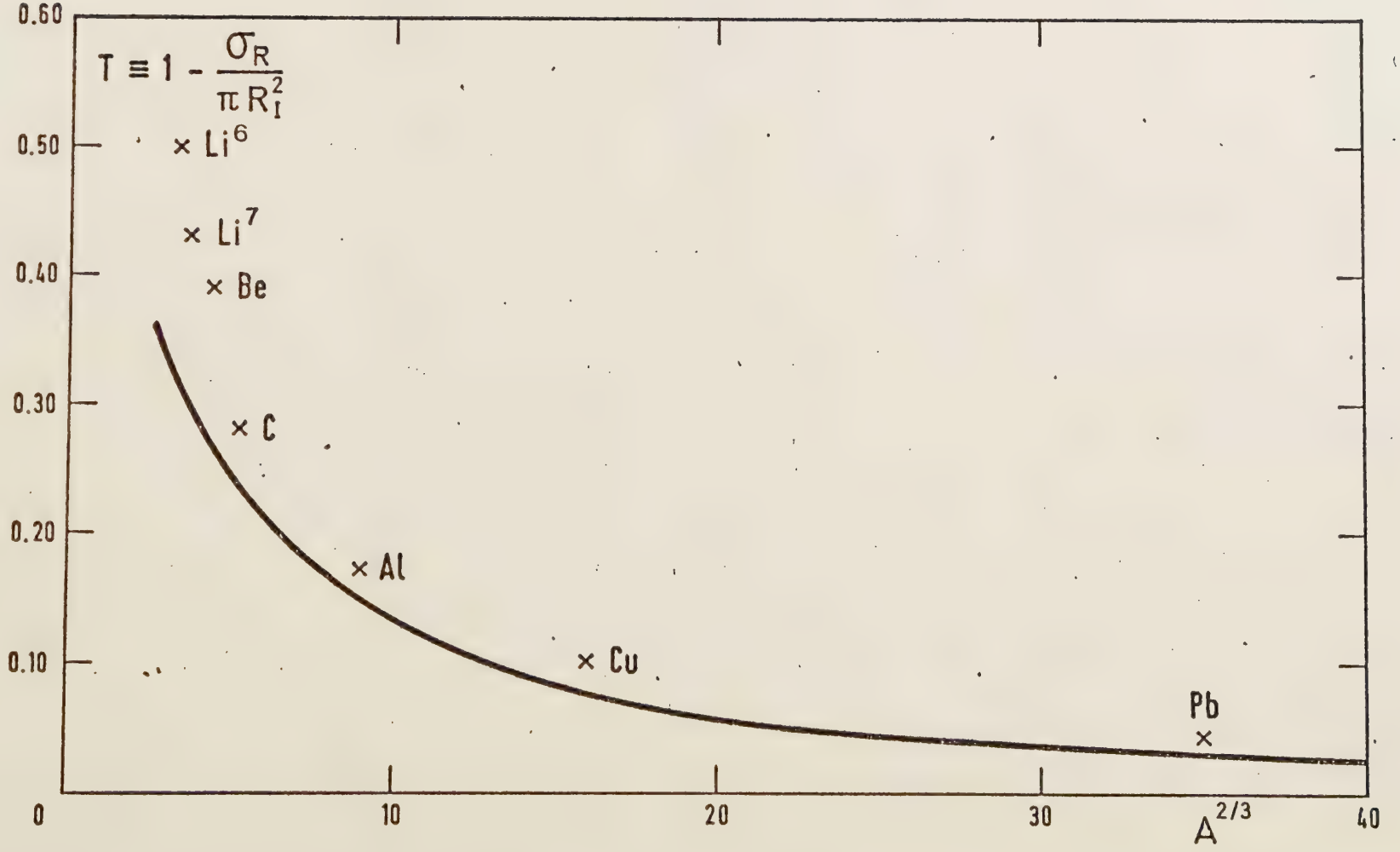

$T \equiv 1 - \frac{\sigma_R}{\pi R_I^2}$
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0
10
20
30
40
$A^{2/3}$
× Li^6
× Li^7
× Be
× C
× Al
× Cu
Pb
×

Fig. 1

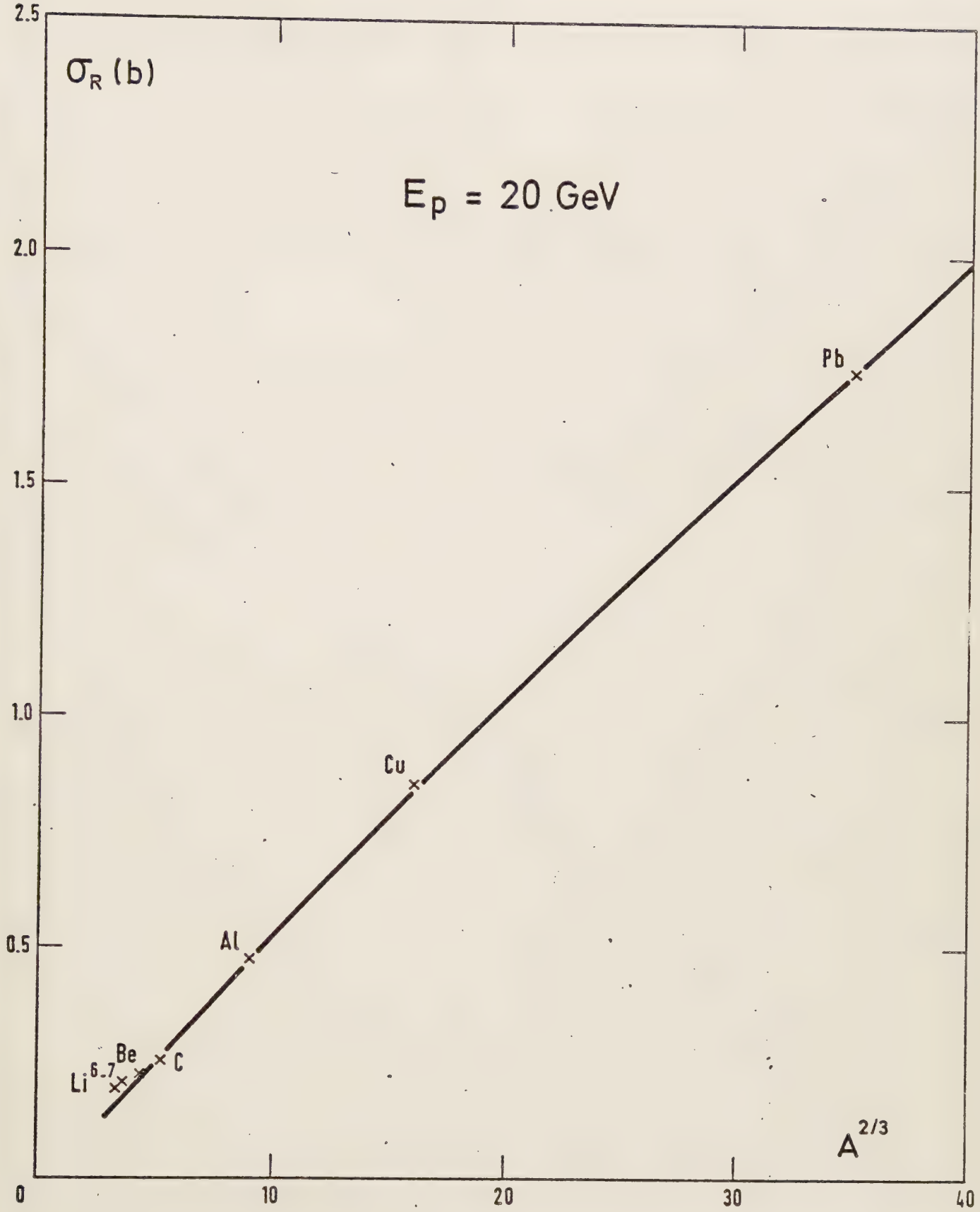


Fig. 2

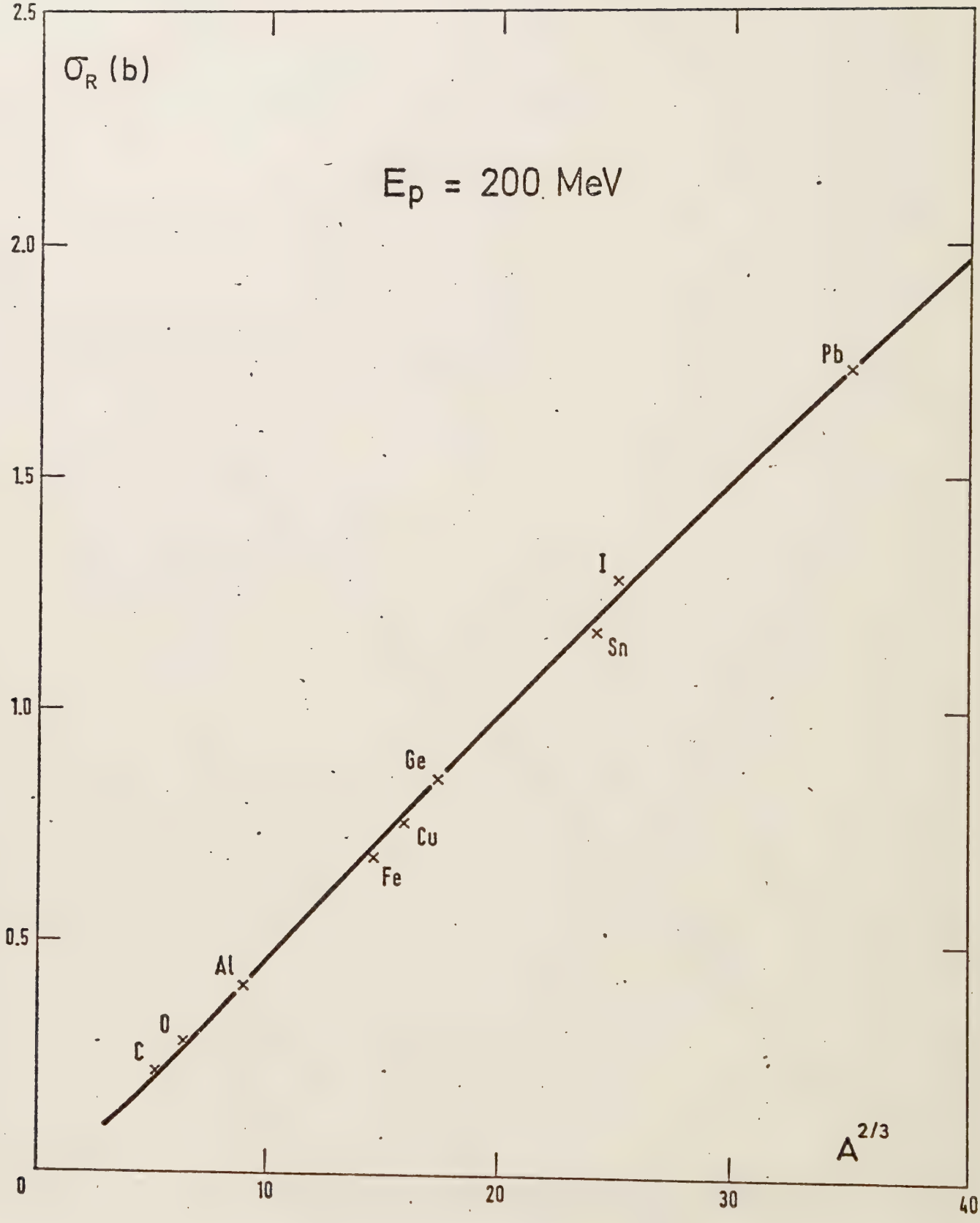

σ_R (b)
E_p = 200 MeV
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
10
20
30
40
$A^{2/3}$
Pb
I
Sn
Ge
Cu
Fe
Al
O
C

Fig. 3

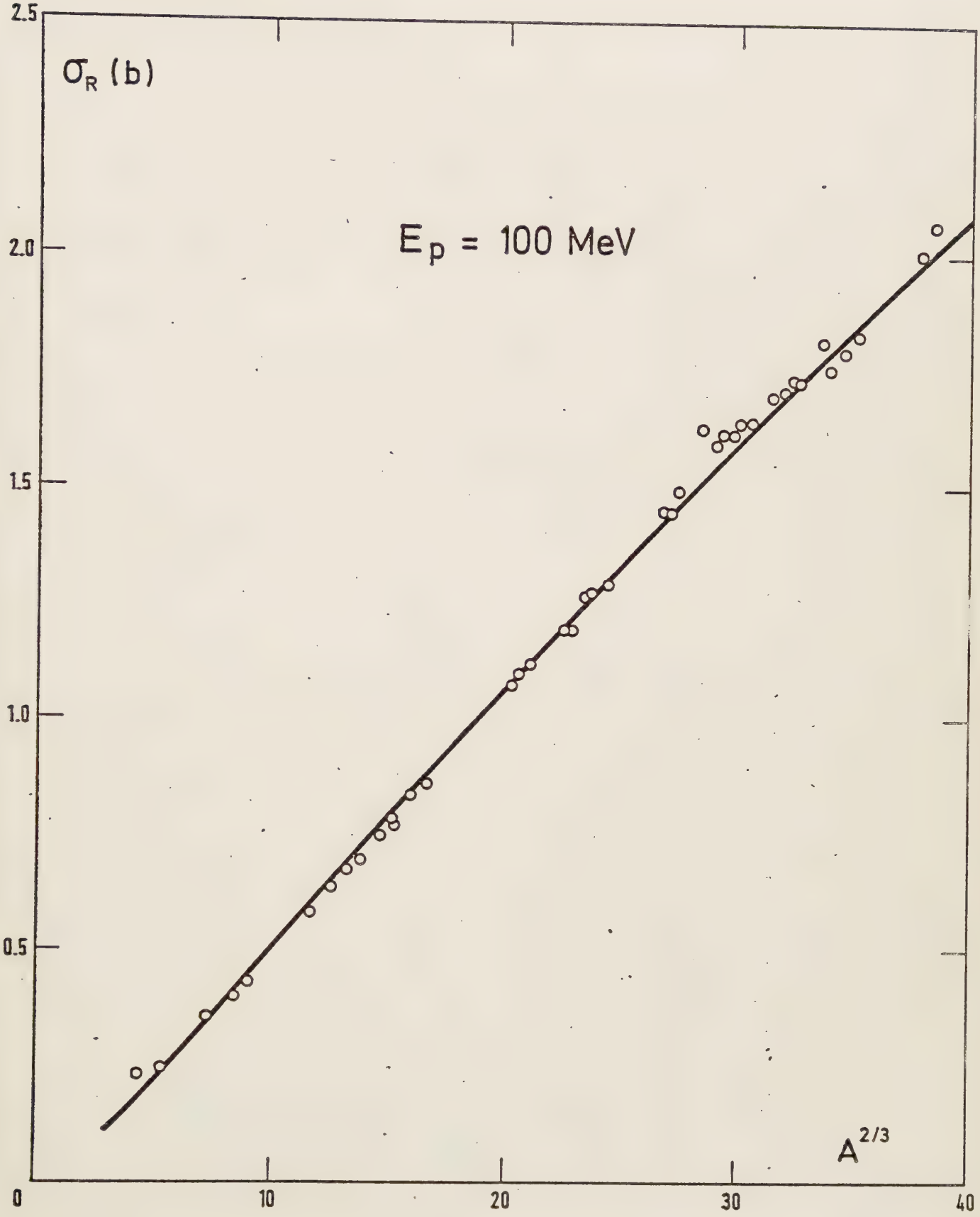


Fig. 4

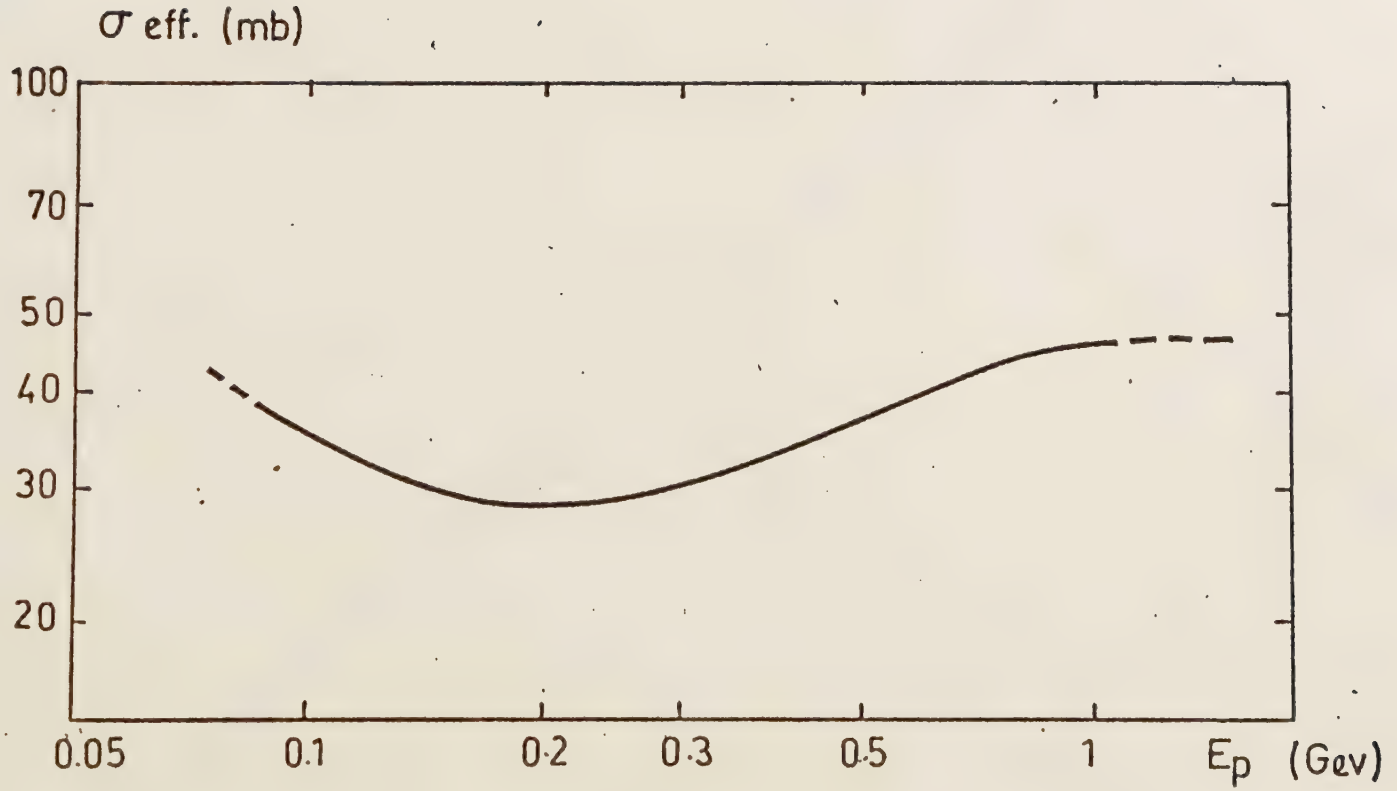
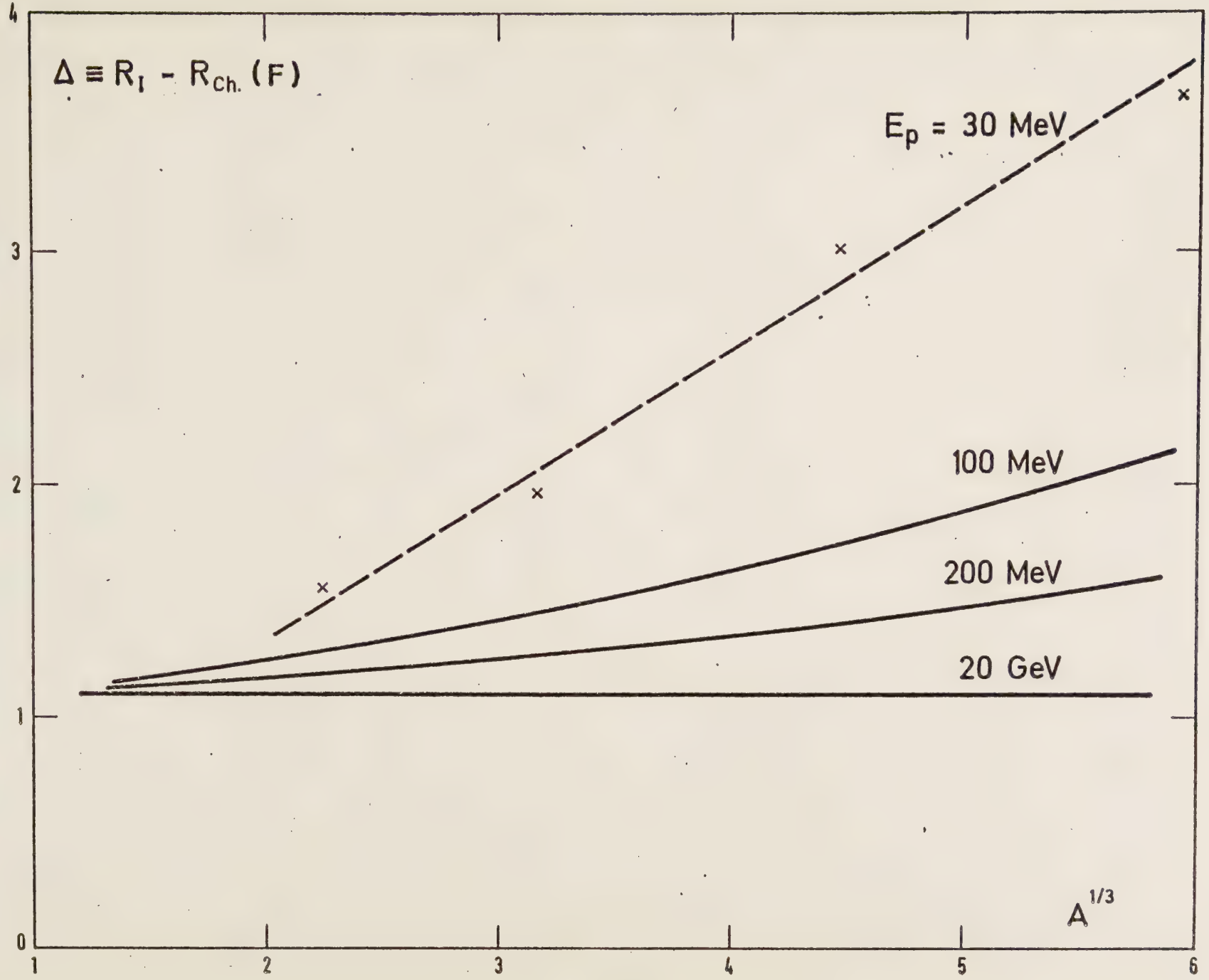


Fig -5



g. 6

IV - Le modèle optique de la diffusion élastique proton-proton.

Le modèle optique du noyau, généralisation naturelle de la méthode de Hartree-Fok pour le calcul des fonctions d'onde des systèmes liés, assimile l'action du noyau sur une particule incidente à un potentiel, qui représente la valeur moyenne sur l'état fondamental de l'interaction de chaque nucléon de la cible avec le projectile.

Contrairement au potentiel de Hartree-Fok, ce potentiel optique contient une partie imaginaire et le hamiltonien n'est donc pas unitaire ; ceci vient du fait que le modèle optique ne traite que les évènements qui se produisent dans le canal élastique : les particules incidentes qui s'en évadent pour entrer en réaction avec le noyau sont donc considérées comme ayant "disparu". Le modèle optique donne cependant une indication sur les canaux de réaction, mais uniquement de façon globale : il permet de calculer la section efficace totale de réaction, σ_R, précisément grâce à la condition physique d'unitarité.

Ce modèle a eu un succès considérable dans la description de la diffusion élastique de particules légères (n, p, d, α, etc...) et même de noyaux plus lourds ; nous donnerons dans cette section un bref historique de son développement.

Etant donné leur signification de valeurs moyennes, les paramètres du potentiel optique varient en général très régulièrement en fonction de la masse A et de l'excès de neutron $\mathcal{E} = \frac{N-Z}{A}$; leur variation en fonction de l'énergie incidente est aussi très régulière, contrairement à ce qui se passe dans la théorie du noyau composé, où l'on observe des résonances.

Il est donc en principe possible de représenter l'ensemble des données de la diffusion élastique proton-noyau, par exemple, par un nombre relativement restreint de paramètres : les nombreuses tentatives effectuées en ce sens ont maintenant obtenu un succès à peu près complet, malgré les difficultés suivantes.

La plus importante, inhérente au modèle, est l'ambiguïté dans la détermination des paramètres : ainsi, la donnée d'une distribution angulaire $\sigma(\theta)$ ne détermine pas de façon unique la profondeur V du puits réel et son rayon R, mais donne une plage de valeurs possibles pour V et R, reliées par une relation du type $VR^n = C^{te}$ ($n \simeq 2$), et conduisant à des fits de qualité voisine. Une étude détaillée sur ce sujet a été faite par Rolland (1966).

Cependant, cette liberté relative dans le choix des paramètres disparaît presque complètement si l'on traite simultanément un assez grand nombre de noyaux, tout en imposant une variation régulière des paramètres en fonction de A. Les analyses par le modèle optique sont donc intéressantes surtout lorsqu'elles portent sur une série de noyaux ; celles qui portent sur un seul noyau risquent de fournir des résultats assez différents.

Une deuxième difficulté, très importante pour nous, tient au fait que la partie imaginaire W(r) du potentiel, qui commande la section de réaction σ_R, n'a qu'un effet indirect sur la diffusion élastique. Seules des mesures de σ_R assez précises et assez nombreuses ont permis de se faire une idée de ce potentiel, qui reste cependant assez mal connu : en effet, on dispose d'une seule donnée (σ_R) pour l'identifier, au lieu

d'une distribution angulaire complète ($\sigma(\theta)$) dans le cas du potentiel réel. De la même façon, le potentiel spin-orbite V_{S-O} ne peut être déterminé avec précision que par l'étude des distributions angulaires de polarisation, $P(\theta)$.

Domaine de validité du modèle :

La limite, aux basses énergies, est imposée par l'apparition de la diffusion "compound-elastic" σ_{CE}, soit, pour la diffusion de neutrons : $E_n \gtrsim 4$ MeV.

Pour les protons, la répulsion coulombienne favorise la désexcitation du noyau composé par la voie élastique, lorsqu'on est au-dessous du seuil de la réaction (p, n) ; d'après Bechetti et Greenlees (1968) σ_{CE} devient négligeable à partir de : $E_p \gtrsim Q(p, n) + 4$ MeV $\sim$ 9 MeV (voir fig. 1).

D'autre part, d'après Perey (1963), le modèle s'applique le mieux aux noyaux relativements lourds : $Z \gtrsim 13$.

1) Formalisme.

a) Forme des potentiels.

On représente généralement les potentiels proton-noyau sous la forme :

$$\bar{V} = V(r) + i\, W(r)$$

avec :

$$\begin{cases} V(r) = - V_o\, f(r,r_o,a) + \dfrac{V_{SO}}{m_\pi^2}\, \vec{l}.\vec{S}\, \dfrac{1}{r}\, \dfrac{d}{dr} f(r,r_{So}, a_{So}) + V_c(r) \\ W(r) = - W_o\, f(r,r_I,a_I) + 4\, a_I\, W_d\, \dfrac{d}{dr} f(r,r_I,a_I) \end{cases}$$

Les rayons r_o, r_{so}, r_I sont les rayons réduits, auxquels correspondent les rayons géométriques $R_\alpha = r_\alpha A^{1/3}$; la fonction $f(r, r_o, a)$ est généralement de la forme de Woods-Saxon :

$$f(r, r_o, a) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r - r_o A^{1/3}}{a}\right)}$$

Le potentiel $V_c(r)$ est le potentiel coulombien, qu'on calcule généralement en supposant une distribution de charge uniforme :

$$\begin{cases} V_c(r) = \dfrac{Z e^2}{r} & \text{si} \quad r > R_c \\ V_c(r) = \dfrac{Z e^2}{2 R_c} \left(3 - \dfrac{r^2}{R_c^2}\right) & \text{si } r < R_c \end{cases}$$

La valeur exacte de R_c a peu d'influence sur le résultat : on choisit souvent : $r_c = 1.25$ F (Perey, 1963).

Les potentiels en $f(r, r_o, a)$ sont dits potentiels "de volume", et ceux en $\frac{d}{dr} f(r, r_o, a)$ potentiels "de surface" : on voit que le potentiel imaginaire $W(r)$ contient un terme de chaque espèce, et que le potentiel spin-orbite V_{So} est un potentiel de surface.

b) Détermination des sections efficaces et limite semi-classique.

La section efficace élastique se calcule à partir des déphasages δ_l de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f(\theta) \right|^2 \\ \\ f(\theta) = \lambda \sum_l (2l+1)\ P_l\ (\cos\theta)\ \sin\ \delta_l . e^{\,i\,\delta_l} \end{cases}$$

Les déphasages étánt complexes, on introduit l'élément de matrice S : $\eta_l = e^{\,2i\delta_l}$ ($|\eta_l| \leqslant 1$), et l'amplitude de diffusion s'écrit :

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{2i} \sum_l (2l+1)\ (\eta_l - 1)\ P_l(\cos\theta)$$

La section efficace élastique totale et la section de réaction valent donc :

$$\begin{cases} \sigma_{el} = \pi\lambda^2 \sum_l (2l+1)\ \left| 1 - \eta_l \right|^2 \\ \sigma_R = \pi\lambda^2 \sum_l (2l+1)\ (1 - |\eta_l|^2) \end{cases}$$

et la section totale :

$$\sigma_T \equiv \sigma_{el} + \sigma_R = 2\pi\lambda^2 \sum_l (2l+1)\ (1 - \mathrm{Re}\ (\eta_l))$$

Lorsque le nombre d'ondes partielles est très grand ($R \gg \lambda$), on peut utiliser l'approximation semi-classique dans laquelle l'onde partielle l est associée à la trajectoire de paramètre d'impact $b \simeq \sqrt{l\ (l+1)}\ \lambda \sim (l + \frac{1}{2})\ \lambda$; le déphasage $2\ \delta_l$ est alors simplement le déphasage introduit par le potentiel le long de la trajectoire classique correspondante, soit l'intégrale curviligne : $2\ \delta_l = \int_{-\infty}^{+\infty} (n(r) - 1)\ ds$

où l'indice n(r) est défini à partir du potentiel par :

$$n(r) = \sqrt{1 - \frac{\bar{V}(r)}{E}}$$

Cette méthode donne des résultats corrects au-delà de 40 MeV (B. Gaffet, 1971).

Lorsque W(r) est petit par rapport à V(r) (ce qui est presque toujours le cas), on peut développer l'indice n(r) sous la forme :

$$n(r) = \sqrt{1 - \frac{\bar{V}(r)}{E}} - \frac{i\,W(r)}{2E\sqrt{1 - \frac{\bar{V}}{E}}}$$

On en déduit l'expression de l'opacité K(r) (inverse du libre parcours moyen) :

$$K(r) \equiv -\frac{2}{\lambda}\,\mathrm{Im}\,n(r) = \frac{2W(r)}{v(r)}$$

A haute énergie ($E \gg |V|$) les trajectoires deviennent rectilignes et on obtient σ_R sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma_R = 2\pi \int_0^{+\infty} (1 - T(b))\, b\, db \\ T(b) = \exp - \int_{-\infty}^{+\infty} K(r)\, dz \end{cases}$$

où la dernière intégrale est calculée le long de la trajectoire, soit : $r = \sqrt{b^2 + z^2}$.

Dans le cas d'un puits carré, on retrouve ainsi la formule de Bethe et Fernbach.

2) Les étapes du développement du modèle.

Les analyses en modèle optique étant très nombreuses, nous n'en citerons que quelques unes.

a) En 1958, Bjorklund et Fernbach parviennent à représenter correctement les $\sigma(\theta)$, $P(\theta)$ et σ_R de la diffusion de neutrons de 4 à 17 MeV sur des cibles allant de l'Aluminium au Bismuth.
La géométrie de la partie réelle est : $r_o = 1.25$ F, $a = 0.65$ F ; la partie imaginaire est "superficielle", avec une épaisseur : $a_I = 0.47$ F, et le même rayon $r_I = r_o = 1.25$ F.
Les profondeurs des potentiels sont indépendantes de A mais varient régulièrement en fonction de l'énergie E, ce qu'on explique par la non-localité du "vrai" potentiel (Perey et Buck, 1962).

b) En 1963, Perey effectue une analyse optique détaillée de la diffusion de protons de 9 à 22 MeV à partir de 35 distributions angulaires $\sigma(\theta)$, obtenues avec des noyaux lourds ($Z \geqslant 13$). Il utilise la géométrie déterminée par Bjorklund et Fernbach pour les neutrons ($r_o = r_I = 1.25$, $a = 0.65$, $a_I = 0.47$) dans le but de rendre plus facile la comparaison des résultats et conclut à sa compatibilité avec les données. Perey indique une formule donnant le potentiel réel V_o en fonction de A, Z et E : V_o contient tout d'abord un terme en $Z/A^{1/3}$ dû au fait que le potentiel est fonction de l'énergie et que le niveau d'énergie zéro est déplacé de la hauteur de la barrière coulombienne. D'autre part, Perey met en évidence une variation de V_o en fonction du "nombre de symétrie" $(N-Z)/A$ et donne la formule suivante :

$$V_o = 53.3 - 0.55\ E + 0.4\ Z/A^{1/3} + 27.(N-Z)/A$$

La partie imaginaire a également une variation en fonction de $\mathcal{E} \equiv (N-Z)/A$, et, à 22 MeV, il devient nécessaire d'ajouter une absorption de volume à l'absorption superficielle.

Les polarisations $P(\theta)$ et les sections de réaction σ_R calculées sont alors en assez bon accord avec les données (rappelons que les potentiels ont été calculés de façon à reproduire les sections différentielles $\sigma(\theta)$).

c) L'étape suivante est marquée par l'analyse optique de Fricke et al. à 30 et 40 MeV (1967). Ces auteurs effectuent une recherche systématique sur les paramètres géométriques, en partant des distributions $\sigma(\theta)$ et $P(\theta)$ à 40 MeV. Ils obtiennent la géométrie moyenne suivante :

$$\begin{cases} r_o = 1.16 & a = 0.75 \\ r_I = 1.37 & a_I = 0.63 \\ r_{s.o.} = 1.064 & a_{s.o.} = 0.738 \end{cases}$$

On voit que le potentiel spin-orbite a un rayon plus faible que le potentiel central, et la partie imaginaire un rayon plus élevé. Cette géométrie leur fournit des fits à 30 et 40 MeV nettement meilleurs que celle utilisée par Perey à plus basse énergie (9 à 22 MeV).

d) En 1969, Fulmer et Ball analysent la diffusion élastique de protons de 61.4 MeV. Ils mettent en évidence une dépendance du rayon r_o en fonction de $\frac{N-Z}{A}$:

$$r_o = 1.161 + 0.31\ (\frac{N-Z}{A}).$$

mais utilisent cependant la géométrie déterminée par Fricke, jugée compatible avec les résultats. Ils obtiennent ainsi une paramétrisation du modèle optique dans tout le domaine de 30 à 60 MeV :

$$\begin{cases} V_o = 49.9 - 0.215\ E + 0.4\ Z/A^{1/3} + 26.0\ (\frac{N-Z}{A}) \\ r_o = 1.16\ ,\ a = 0.75 \end{cases}$$

En l'absence de données sur les polarisations à 60 MeV, les auteurs conservent le potentiel spin-orbite de Fricke :

$$V_{s.o.} = 6.04 \text{ MeV},\ r_{s.o.} = 1.064 \text{ F},\quad a_{s.o.} = 0.738 \text{ F}$$

La partie imaginaire à 60 MeV est déterminée uniquement à l'aide des $\sigma(\theta)$; elle est assez mal définie :

$$W_o \simeq 6 \text{ MeV}\ ,\quad W_d \simeq 1.28\ A^{1/3} - 3.5 \text{ MeV}\ ,\ r_I = 1.37 \text{ F},$$

$$a_I = 0.63 \text{ F}$$

Les σ_R ainsi obtenus sont en assez bon accord avec les mesures (Menet, 1971), cependant ils sont presque systématiquement trop grands de 10 % environ.

e) Citons également l'analyse optique à 10.5 MeV de Rosen et al. (1965), qui a la particularité de n'utiliser comme données que les distributions angulaires de polarisation, $P(\theta)$. Les auteurs obtiennent ainsi de bons fits des polarisations - meilleurs que ceux de Perey - et les sections différentielles calculées $\sigma(\theta)$ sont satisfaisantes. Les paramètres optiques

sont les suivants :

$$\begin{cases} V_o = 47.7 - 0.33\ E + 0.4\ Z/A^{1/3} + 26.2\ (N-Z)/A \\ r_o = 1.25\ , \quad a = 0.65 \\ W_o = 0.\ , \quad W_d = 7.5\ \text{MeV} \\ r_I = 1.25\ , \quad a_I = 0.70 \\ V_{s.o.} = 5.5\ \text{MeV} \\ r_{s.o.} = r_o\ , \quad a_{so} = a \end{cases}$$

La partie imaginaire est très mal déterminée et conduit à de mauvaises valeurs des σ_R.

Etudes portant sur la détermination de la partie imaginaire du potentiel.

f) Becchetti et Greenlees (1969) ont cherché à fitter simultanément l'ensemble des résultats expérimentaux sur la diffusion proton-noyau, de manière à obtenir les potentiels optiques les meilleurs possibles. En fait, ils ne considèrent que les résultats suffisamment précis et complets - c'est à dire des résultats fournissant à la fois $\sigma(\theta)$, $P(\theta)$ et σ_R.

Pratiquement, ils étudient le domaine d'énergie de 10 à 50 MeV en ne considérant que les noyaux lourds ($A > 40$) de façon à éliminer les fluctuations habituelles chez les noyaux légers. Ils obtiennent ainsi une série de paramétrisations fournissant des fits de qualité comparable, la meilleure paramétrisation étant la suivante (voir fig. 2) :

$$\begin{cases} V_o = 54.0 - 0.32\ E + 0.4\ Z/A^{1/3} + 24.0\ (N-Z)/A \\ r_o = 1.17,\ a = 0.75 \\ W_o = \sup\ [\ 0.22\ E - 2.7,\ 0\ ] \\ W_d = \sup [\ 11.8 - 0.25\ E + 12.0\ (N-Z)/A\ ,\ 0\ ] \\ r_I = 1.32, \qquad a_I = 0.51 + 0.7\ (\frac{N-Z}{A}) \\ V_{s.o.} = 6.2 \qquad r_{s.o.} = 1.01 \qquad a_{s.o.} = 0.75 \end{cases}$$

Grâce à la masse des données analysées, ce calcul fournit des données relativement précises sur la partie imaginaire des potentiels. Cependant il ne faut pas perdre de vue que σ_R est ainsi sur-paramétré et qu'un grand nombre d'autres valeurs de W_o, W_d, r_I, a_I peuvent fournir exactement les mêmes σ_R, tout en modifiant fort peu la diffusion élastique.

Remarquons que les σ_R calculés dans ce modèle sont un peu trop grands pour les éléments "légers" ($A < 90$) (voir fig. 3).

g) Menet et al. (1971) mesurent les sections de réaction d'un grand nombre de noyaux aux énergies de 30, 40, 50 et 60 MeV, et les introduisent dans le modèle optique en conservant les potentiels réels déterminés par Fulmer et Ball dans ce domaine d'énergie (ainsi que le rayon r_I du potentiel imaginaire: $r_I = 1.37$ F); les autres paramètres définissant le potentiel absorbant (W_o, W_d, et a_I) sont alors déterminés de façon à reproduire au mieux l'ensemble des données: $\sigma(\theta)$, $P(\theta)$ et σ_R. Ils obtiennent ainsi :

$$\begin{cases} W_o = 1.2 + 0.09\ E \\ W_d = 4.2 - 0.05\ E + 15.5\ \varepsilon \\ a_I = 0.74 - 0.008\ E + 1.0\ \varepsilon \end{cases}$$

Les sections de réaction ainsi obtenues reproduisent généralement bien les données ; cependant, on remarque que la valeur de a_I devient petite à 60 MeV, pour un noyau symétrique : $a_I = 0.26$ F, ce qui est peu réaliste. Ceci explique en particulier le fait que la section de réaction du Carbone soit très mal représentée.

h) Signalons pour terminer les travaux suivants sur le modèle optique, que le manque de place nous empêche de considérer ici en détail :

(NP = Nuclear Physics ; P.R. = Physical Review)

Saxon and Woods : PR 95, 577 (1954) (E = 20 MeV)

Melkanoff, Nodvik, Saxon : PR 106, 793 (1957)(E = 17 et 31.5 MeV)

Glassgold : PR 106, 1207 (1957) (E = 9.8 MeV)

Glassgold and Kellogg: PR 107, 1372 (1957)

Glassgold and Kellogg: PR 109, 1291 (1958) (40 et 95 MeV)

Nodvik, Saxon : PR 117, 1539 (1960)

Albert : PR 123, 1749 ( )

Greenlees and Pyle : PR 149, 836 (1966) (30 MeV)

Satchler : NP A 92, 273 (1967)

Fricke and Satchler : PR 139, B 567 (1965) (40 MeV)

Conclusion

Les éléments assez lourds ($A \gtrsim 27$) sont bien représentés par le modèle optique au delà de 10 MeV environ (à cette

énergie, la diffusion "compound-elastic" est faible).

La partie réelle du potentiel est bien déterminée. Cependant, comme l'indique Becchetti (1969) il subsiste un certain arbitraire dans le choix du rayon ; c'est d'ailleurs ce qui autorise le choix d'une loi $R_o = r_o A^{1/3}$, qui n'est pas très réaliste. Les quantités qui sont bien déterminées sont, d'après Greenlees, Pyle et Tang (1968) les moments du potentiel :

$$\begin{cases} J_o = \int_o^{+\infty} r^2 V(r)\, dr \\ J_2 = \int_o^{+\infty} r^4 V(r)\, dr \end{cases}$$

La partie imaginaire du potentiel est connue de façon assez satisfaisante également, en particulier grâce aux travaux de Becchetti (1969) et de Menet (1971). Cependant il est clair que les mêmes remarques peuvent être faites à son sujet et que les grandeurs déterminées avec précision sont surtout les moments :

$$K_2 = \int_o^{+\infty} W(r)\, dr$$ (qui indique le degré de transparence du noyau le long d'un diamètre).

$$K_0 = \int_o^{+\infty} r^2 W(r)\, dr$$

$$K_2 = \int_o^{+\infty} r^4 W(r)\, dr \quad \text{etc...}$$

Cependant, si l'absorption est très forte, c'est surtout la forme de W(r) à la surface qui est bien déterminée.

Il est important de remarquer que la section de

réaction augmente notablement en fonction de l'excès de neutron ε le long d'une même série isotopique : les analyses optiques de Becchetti et de Menet en particulier reproduisent bien ces variations pour les isotopes de Fe, Ni, Zn, Zr, etc...

3) Extension du modèle optique aux noyaux légers, (O, C, Li, Be, B, etc...).

En général, les analyses optiques dont il a été question plus haut ne donnent pas de bons résultats pour les noyaux légers (O^{16}, C^{12}, etc...) ; en effet, la diffusion élastique garde un comportement résonant jusqu'à des énergies assez élevées (20 ou 30 MeV) à cause de la faible densité des niveaux du noyau composé.

Nodvik, Duke et Melkanoff (1962) parviennent à fitter les $\sigma(\theta)$ et $P(\theta)$ du Carbone entre 12 et 20 MeV, mais les paramètres des potentiels ne varient pas régulièrement en fonction de l'énergie.

Ce demi-succès à conduit Duke (1963) à effectuer le même type d'analyse sur un autre noyau léger, l'oxygène ; il obtient également de bons résultats, sauf de 11 à 12 MeV, mais les paramètres varient encore plus rapidement en fonction de l'énergie.

En 1969, Watson et al. entreprennent de déterminer les potentiels optiques des noyaux de la couche 1p, de Li^6 à O^{16}, dans un vaste domaine d'énergie (10 à 50 MeV). Conformément à l'esprit du modèle ils cherchent des paramètres variant lentement en fonction de l'énergie, même au prix d'un accord moins bon avec l'expérience. Les fits obtenus reproduisent

l'emplacement des maxima et des minima de $\sigma(\theta)$ ainsi que la pente moyenne de la courbe, la principale différence étant la profondeur relative des deux premiers minima. Comme on pouvait le prévoir de la part de noyaux très légers les fits sont de qualité médiocre, mais ils couvrent un grand domaine d'énergie (10 à50 MeV) et représentent l'ensemble des noyaux Li^{6-7}, Be^{9}, B^{10-11}, C^{12-13}, N^{14}, O^{16}. Les paramètres obtenus sont les suivants :

$$V_o = 60.0 - 0.3\, E_{CM} + 0.4\, Z/A^{1/3} + 27.0\, (N-Z)/A$$

$$r_o = r_I = r_{s.o.} = r_c = 1.15 - 0.001\, E_{CM}$$

$$a = a_{so} = 0.57 \qquad a_I = 0.5$$

$$W_o = \begin{cases} 0 \text{ si } E_{CM} < 32.7 \text{ MeV} \\ 1.15\,(E_{CM}-32.7) \text{ si } 32.7 < E < 39.3 \\ 7.5 \qquad\qquad \text{si } E_{CM} > 39.3 \end{cases}$$

$$W_d = \begin{cases} 0.64\, E & \text{si } E < 13.8 \\ 9.60 - 0.06\, E & \text{si } E > 13.8 \end{cases} + 10.0\ \frac{(N-Z)}{A}$$

La partie imaginaire est sans doute mal déterminée en l'absence de données sur les sections efficaces de réaction.

Principales analyses optiques du Carbone :

- Nodvik, Duke and Melkanoff, PR 125, 975 (1962) (7 à 20 MeV)
- Tamura et al. Phys. Lett., 8, 41 (1964) (20 à 30 MeV)
- Fannon, Burge and Smith, NP A 97, 263 (1967) (30 à 50 MeV)
- Satchler, NP A 100, 497 (1967)
- Craig and Dore, NP 83, 493 (1966)
- Blumberg, PR 147, 812 (1966)
- Scott, NP A 99, 177 (1967).

En ce qui concerne l'Oxygène, citons les études de :

- Duke, PR 129, 681 (1962) (8 à 20 MeV)
- Hardie, Dangle, Oppliger, PR 129, 353 (1962) (8 à 14 MeV)
- Van Oers and Cameron, PR 184, 1061 (1969) (23 à 53 MeV)
- Houdayer, Li and Mark, Can. J. of Physics 48, 765 (1970) (100 MeV, O^{16}, B^{11}).

Pour les noyaux plus légers indiquons :

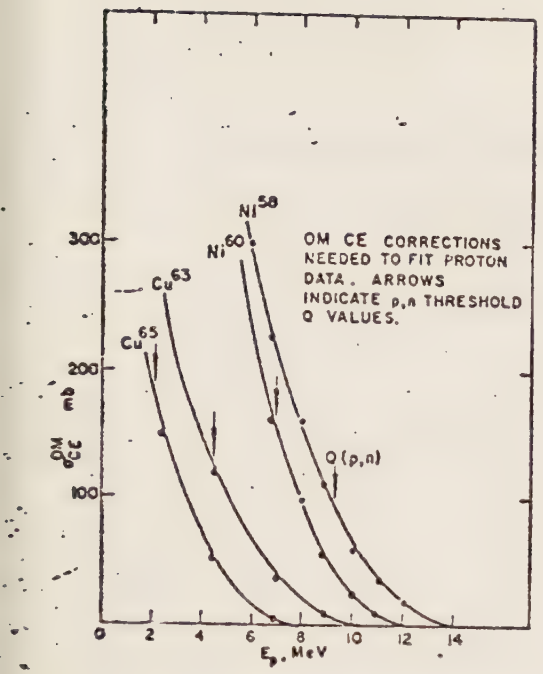
- Mani, Jacques and Dix, NP A 165, 145 (1970) (E=50 MeV, Li^{6-7}, B_e^{9})
- Karban et al., NP A 133, 255 (1969) (30 MeV, B^{11})
- Watson et al., PR 182, 977 (1969) (10 à 50 MeV, Li^{6} à O^{16})
- Lowe, NP A 162, 438 (1971) (30 MeV, B^{11})
- Squier, NP A 141, 158 (1970) (50 MeV, B^{10})
- Loyd, NP A 148, 236 (1970) (B_e^{9}, 3 à 12 MeV)
- Clarke, NP A 157 145 (1970) (B_e, CNO, 45 à 50 MeV)
- Gleyvod, NP 63, 650 (1965) (Li^{7}, 10 et 11 MeV).

Légende des figures

Fig. 1 : D'après Becchetti et Greenlees (1969). Sections efficaces "compound-elastic" σ_{CE} obtenues comme résidu par l'analyse optique des sections élastiques expérimentales. On voit que σ_{CE} devient rapidement négligeable au-delà du seuil de la réaction (p, n).

Fig. 2 : D'après Becchetti et Greenlees. Forme du potentiel absorbant W(r) obtenu pour Sn^{120} à diverses énergies (10 à 40 MeV).

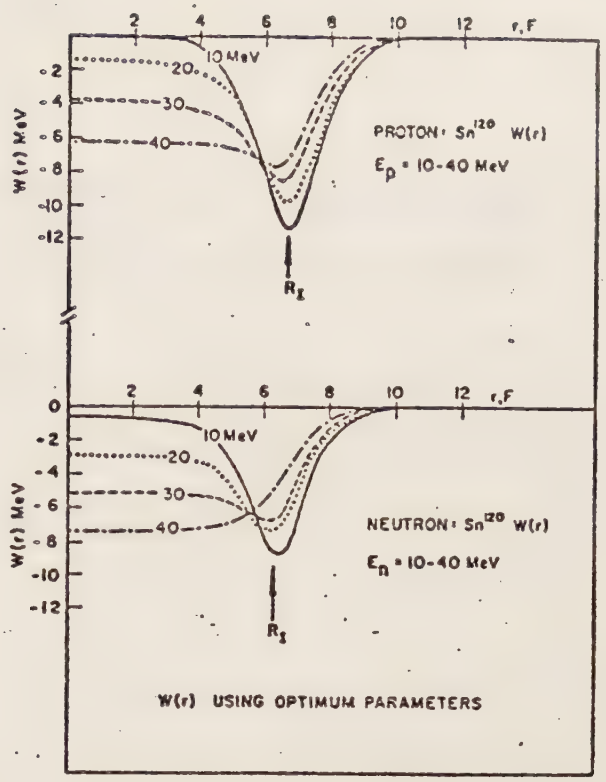
Fig. 3 : D'après Becchetti et Greenlees. Sections de réaction σ_R prévues par leur modèle optique. Les valeurs prévues sont systématiquement trop élevées, en particulier pour les noyaux de masse $A < 90$.



The total isotropic compound elastic corrections found for protons as a function of energy.

Fig. 1

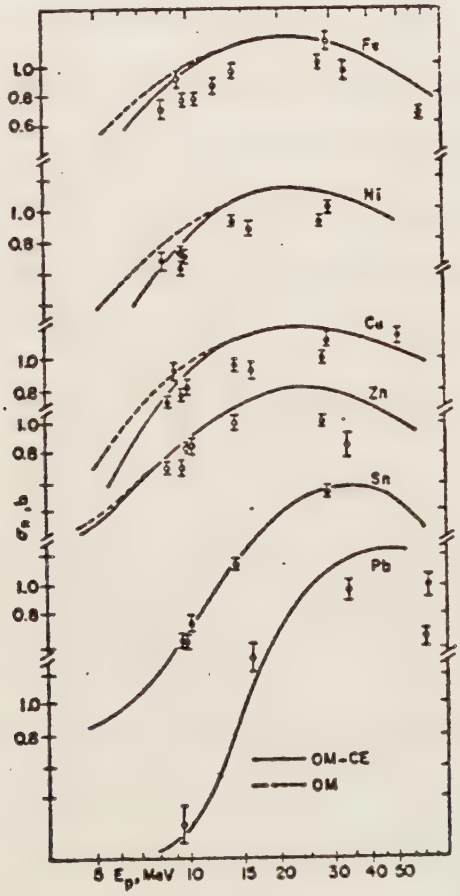
d'après Becchetti et Greenlees (B.G.)



Plots of the best-fit neutron and proton imaginary potentials found for Sn^{120}.

Fig. 2

(d'après B.G.)



Comparison of the reaction cross-section predictions with experimental values using the proton best-fit parameters (Refs. 11-16 and 42, 43).

Fig. 3

(d'après B.G.)

V - Analyse optique des sections efficaces de réaction aux énergies moyennes. Influence de l'excès de neutron $\frac{N-Z}{A}$

Comme on l'a vu, presque toutes les études des sections efficaces de réaction par le modèle optique utilisent la forme $R_\alpha = r_\alpha A^{1/3}$ pour les rayons. Ceci n'est pas très gênant pour la partie réelle du potentiel, car la valeur $r_o \simeq 1.16$ F qu'on obtient est assez voisine de la valeur théorique pour un noyau saturé ($l = 1.12$ F, voir section I) ; le problème est plus sérieux pour la partie imaginaire du potentiel, car on obtient une valeur élevée de r_I (1.37 F). D'autre part, les sections de réaction sont évidemment très sensibles au facteur géométrique surtout lorsque l'opacité est importante, ce qui est le cas aux énergies que nous considérons ; dans le cas de la diffusion élastique, on pouvait "compenser" efficacement une erreur sur le rayon par un changement de la profondeur du puits, mais cela n'est pas possible dans le calcul de σ_R d'un noyau presque noir, du fait de la saturation : $\sigma_R \longrightarrow \pi R_I^2$, indépendamment de la valeur de l'opacité.

Il nous a donc paru nécessaire d'introduire une forme plus physique pour les rayons d'absorption dans le modèle optique, de façon à éviter des erreurs systématiques importantes dans la détermination des opacités. Suivant la méthode que nous avons déjà utilisée dans notre analyse semi-classique à haute énergie, nous écrirons donc les rayons sous la forme,

$$R_I = R_o + \Delta(\mathcal{E})$$

où R_o est le rayon de demi densité de charge, et l'écart Δ

fonction de l'énergie E et de $\mathcal{E}$, est à déterminer.

Nous avons ainsi obtenu pour l'écart Δ et les potentiels imaginaires W_o, W_d, des valeurs et des variations en fonction de $\mathcal{E}$ qui permettent de reproduire de façon satisfaisante l'ensemble des données sur les sections de réaction proton-noyau à 14.5 MeV, 30 MeV et 60 MeV, et en particulier l'effet d'accroissement de σ_R le long d'une série isotopique.

Il nous a cependant paru utile d'effectuer une analyse optique préliminaire permettant de caractériser le potentiel imaginaire par un seul paramètre (W_o) et de reproduire correctement les sections de réaction des noyaux de la vallée de stabilité ($\mathcal{E} = \frac{0.015\ A^{1/3}}{2 + 0.015\ A^{2/3}}$, Hofstadter, 1967). Malgré son caractère sommaire, une telle étude permet en effet de tenir compte exactement de l'effet de la répulsion coulombienne, qui ne peut plus être traitée classiquement en dessous de 30 MeV ; elle tient compte également des effets quantiques tels que la réflexion, la réfraction et la diffraction, qui restent importants jusqu'à E $\sim$ 100 MeV. C'est donc le prolongement naturel de l'étude effectuée à haute énergie avec la formule de Bethe-Fernbach.

1) Analyse optique élémentaire pour les noyaux du fond de la vallée de stabilité.

Contrairement au cas de haute énergie, il n'est pas possible de supposer ici une distribution d'opacité carrée, qui introduirait arbitrairement des phénomènes de réflexion à la surface ; il faut donc introduire une épaisseur de surface a_I. Nous avons choisi la valeur déterminée par Fricke et al.

(1967), soit :

$$a_I = 0.63 \text{ F}$$

Pour cette étude préliminaire, nous conservons également la forme qu'ils obtiennent pour le rayon d'absorption

$$R_I = 1.37 \, A^{1/3}$$

Le potentiel réel est celui qui a été déterminé par Fulmer et Ball (1969) pour le domaine d'énergie de 30 à 60 MeV, en utilisant la géométrie fixée par Fricke :

$$r_o = 1.16 \text{ F} \quad , \quad a = 0.75$$

Données expérimentales :

Nous avons utilisé les résultats expérimentaux suivants :

- à 10 MeV, les mesures de sections de réaction de Wilkins et Igo (1963) (19 éléments de Be à Pb)

- à 14.5 MeV, celles de Dicello, Igo et Roush (1967), sur 22 isotopes de Ti, Fe, Ni, Cu, Zn, Zn et Sn

- à 16.4 MeV, celles de Pollock et Schrank (1965) sur C, Mg, Al, Ni, Cu, Pb

- à 29 MeV, les résultats de Makino et al. (1964), sur C, Al, Ni, Ag et Au, ainsi que ceux de Turner et al. (1964)

- à 30, 40, 50 et 60 MeV, les résultats de Menet et al.(1971)

- entre 77 et 133 MeV, on trouve également des mesures de Goloskie et Strauch (1962), sur C, Al, Cu, Ag et Pb.

Nous n'avons pas utilisé certaines mesures, généralement anciennes, qui sont en contradiction avec les données ci-dessus : en particulier des résultats de Gooding (1959) à 34 MeV, de Meyer, Eisberg et al. (1960) à 60 MeV. D'autre part, des mesures de C^{12} et Ca^{40} entre 10 et 20 MeV ont été faites par Dicello et Igo (1970), et une série de mesures de C^{12} par Makino et al. (1965).

Cette liste n'est pas exhaustive ; d'autres références peuvent être trouvées par exemple dans Renberg et al. (1972).

Ces données nous ont permis de tracer les "fonctions d'excitation" (courbes σ_R (E)) entre 10 et 100 MeV pour un certain nombre de noyaux (fig. 1 et 2) ; les courbes tracées ne sont pas le résultat d'un calcul, mais joignent simplement les points expérimentaux. (On peut trouver des courbes analogues dans l'article de Renberg et al. (1972) mais ces auteurs se sont intéressés surtout au domaine E $>$ 100 MeV).

Résultats.

Nous avons tracé (fig. 3 à 7) le résultat de notre calcul pour quelques valeurs du potentiel W_o, aux énergies 10, 16.4, 29, 60 et 100 MeV. On voit que W_o doit augmenter en fonction de A pour reproduire correctement les sections efficaces ; cependant, on peut conserver une valeur unique de W_o pratiquement depuis le Carbone jusqu'aux éléments du pic du Fer.

On remarque également qu'à 30 MeV, énergie où l'opacité du noyau est maximum, il n'est pas possible de reproduire la section efficace des éléments lourds même avec une valeur

élevée de W_o ; il faudrait augmenter le rayon R_I, ou introduire une absorption de surface W_d - ce qui revient à peu près à augmenter R_I d'une quantité 4 a_I.

Utilisant les mesures de C^{12} et Al^{27}, nous obtenons les valeurs suivantes de W_o pour les éléments légers (Tableau II) :

Tableau II

E	16.4	29	60	100
W_o	5	8.4	8	8

La fonction $W_o(E)$ et l'opacité correspondante $K = \frac{2W_o}{v}$, sont représentées sur la fig. 8. On voit que K(E) varie approximativement conformément aux prévisions de la théorie de Goldberger pour une énergie de Fermi $E_F \sim 20$ MeV (Voir fig. 3, section II).

Nous n'avons pas prolongé les courbes jusqu'à l'énergie E = 10 MeV ; W_o fluctue beaucoup d'un noyau à l'autre à cette énergie, car on est proche du seuil de réaction. Cependant, les données à 10 MeV peuvent être représentées par : $W_o = 0.4\ A^{2/3} - 0.6$. Il est intéressant de remarquer que, au-delà de la masse 100, l'absorption ne peut plus avoir lieu que par effet tunnel à cette énergie.

2) Détermination des paramètres du potentiel optique et des sections efficaces de réaction, en fonction de (N-Z)/A.

Comme on vient de le voir, les sections de réaction

σ_R ont un comportement assez régulier en fonction de la masse de la cible, et c'est d'ailleurs ce qui justifie l'étude précédente. Cependant, le développement des mesures effectuées sur des cibles isotopiquement pures a permis de mettre en évidence l'importance du nombre de neutrons contenus dans la cible : la section efficace augmente nettement plus vite le long d'une série d'isotopes que la théorie précédente ne le prévoit, comme on peut le voir sur les figures 9 et 10 (d'après Dicello et al. 1970 et Becchetti et al. 1969).

Outre les mesures de Dicello, on dispose également des résultats de Menet et al. (1971), Worledge et Cavaignac (1971), Becchetti et Greenlees (1969), déjà cités.

Pour tenir compte de cet effet, il a fallu inclure des termes en (N-Z)/A dans les paramètres du potentiel imaginaire : Becchetti et Greenlees en particulier ont effectué une telle étude, et indiquent les résultats suivants (voir fig. 11, 12) pour des énergies $E \lesssim 40$ MeV :

$$\begin{cases} W_o = \sup\ (0.22\ E - 2.7,\ 0) \\ W_d = \sup\ (11.8 - 0.25\ E + 12.\varepsilon\ ,0.) \\ r_I = 1.32, \qquad a_I = 0.51 + 0.7\,\varepsilon \end{cases}$$

Comme on l'a vu plus haut (Section IV), ce choix de paramètres donne cependant des résultats assez mauvais pour les noyaux de masse $A < 90$.

Une autre analyse optique de ce type a été faite par Menet et al. (1971), et complète la précédente, car elle couvre le domaine d'énergie de 30 à 60 MeV ; ils indiquent le

potentiel suivant :

$$\begin{cases} W_o = 1.2 + 0.01\ E \\ W_d = 4.2 - 0.05\ E + 15.5\ \varepsilon \\ r_I = 1.37 \\ a_I = 0.74 - 0.008\ E + 1.0\ \varepsilon \end{cases}$$

On a vu que les calculs de Menet conduisent à une variation trop rapide de la section efficace entre 30 et 60 MeV pour les noyaux légers ; en particulier, il obtient pour le Carbone une section de 235 mb à 60 MeV au lieu de 320 mb environ. Ceci est probablement dû à la valeur très faible de a_I à cette énergie (0.26 F).

Nous avons indiqué sur la fig. 13 les potentiels W_o en fonction de l'énergie, d'après Becchetti et d'après Menet, ainsi que le résultat de la théorie de Goldberger pour E_F = 40 MeV : on voit qu'il y a une divergence d'un facteur 3 environ entre les prévisions théoriques et les résultats du modèle optique. Une des motivations de ce travail est d'examiner si cet écart peut être réduit en introduisant une forme plus réaliste pour la géométrie du potentiel absorbant.

Tenant compte de la formule de Hofstadter pour les rayons de charge :

$$R_o = 1.18\ A^{1/3} - 0.48$$

nous écrivons le rayon R_I sous la forme :

$$R_I = R_o + \Delta(\varepsilon)$$

où la fonction $\Delta(\mathcal{E})$ est à déterminer ; et nous choisissons pour a_I la valeur indépendante de l'énergie introduite par Becchetti :

$$a_I = 0.51 + 0.7\,\mathcal{E}$$

a) Etude des données à 30 MeV. Incompatibilité des résultats pour C^{12} et N_i^{58}.

Admettant la valeur de W_o indiquée par Becchetti et par Menet - soit $W_o = 3.9$ MeV pour E = 30 MeV - chaque section efficace mesurée σ_R^{Exp} se traduit par une courbe (pratiquement rectiligne) dans le plan (W_d, Δ) courbe qui représente la relation : $\sigma_R(W_d, \Delta) = \sigma_R^{Exp}$. Si on dispose de mesures pour deux ou plusieurs noyaux ayant le même $\mathcal{E}$, le point représentatif des noyaux de la "classe $\mathcal{E}$" est donc défini en principe comme l'intersection de ces deux droites. En pratique, ces droites sont presque parallèles (voir fig. 14 a,b) de sorte que la donnée des sections efficaces de deux noyaux de la même classe - par exemple, C^{12} et N_i^{58}, qu'on peut considérer comme définissant la classe $\mathcal{E} = 0$ - équivaut en fait à une condition de compatibilité sur l'absorption de volume W_o. On peut donc espérer de cette façon, et ceci grâce à l'introduction de la forme $R_I = R_o + \Delta(\mathcal{E})$, délimiter un domaine de valeurs acceptables pour W_o. Nous allons voir que l'application de cette méthode au cas de C^{12} et N_i^{58} montre que la valeur $W_o = 3.9$ MeV est trop basse, et conduit à multiplier cette valeur par un facteur 2 au minimum : on aurait ainsi réduit considérablement l'écart des W_o prévus par le modèle optique et par la théorie de Goldberger.

Les mesures effectuées sur le Carbone sont nombreuses et les chances d'une erreur importante sont faibles ; Menet (1971) indique à 30 MeV : σ_R (C^{12}) = 447 ± 20 mb ; cependant, la comparaison avec les mesures à 28 MeV, 40, 50 et 60 MeV indique la valeur probable : σ_R (C^{12}) = 420 mb. (voir en particulier le rapport "Réactions proton-Carbone 12", Gaffet, 1973). Menet donne également la section du Nickel 58: σ_R (N_i^{58}) = 1011 ± 30 mb en bon accord avec les mesures aux énergies voisines (Dicello, 14.5 MeV ; Menet, 40 MeV).

Nous avons tracé (fig. 14a,b) les courbes correspondant à ces valeurs (420 et 1010 mb) dans le plan (W_d, Δ) pour W_o = 3.9 et 7.8 MeV respectivement. Pour W_o = 3.9, la courbe $\sigma_R(C^{12})$ = 420 mb correspond à $\sigma_R(Ni^{58}) \simeq$ 935 mb, ce qui est à 2.5 σ de la valeur mesurée, 1010 mb. Au contraire, pour W_o = 7.8 MeV, la courbe $\sigma_R(C^{12})$ = 420 mb correspond à $\sigma_R(Ni^{58}) \simeq$ 985 mb, ce qui est juste dans la limite de l'incertitude sur le Nickel 58. On est donc conduit à des valeurs de W_o plus élevées que prévues par les modèles de Becchetti et de Menet.

Nous avons refait le même calcul en variant l'épaisseur de surface a_I, mais cela n'a aucune influence sur le résultat : seul un accroissement de W_o peut réduire la divergence entre les noyaux C^{12} et N_i^{58}.

La même étude effectuée sur des noyaux de la "classe" $\mathcal{E}$ = 0.1 : Ti^{49} et Zr^{89}, ne permet pas d'aboutir à une conclusion : les deux valeurs W_o = 3.9 MeV et W_o = 7.8 MeV sont compatibles avec les données (fig.15 a, b). Nous avons pris pour sections efficaces : $\sigma_R(T_i^{49})$ = 1090 mb, d'après le modèle

optique de Menet, qui reproduit très bien les données dans la région du pic du Fer, et $\sigma_R(Zr^{89}) = 1390$ mb.

Pour les valeurs de ε plus élevées, on ne dispose pas d'assez de mesures pour refaire la même analyse.

Ayant fixé la valeur de W_o, une grande liberté de choix subsiste : la procédure correcte consisterait à fixer $\Delta(\varepsilon)$, par un calcul théorique par exemple, et à déduire les valeurs correspondantes de W_d en utilisant les figures 14-15. En l'absence de connaissances sur $\Delta(\varepsilon)$, il paraît raisonnable de le choisir de façon à s'écarter le moins possible de la forme $R_I = 1.37\ A^{1/3}$ pour les noyaux de la vallée de stabilité. On obtient ainsi :

$$\Delta(\varepsilon) \simeq 0.7 + 5.\varepsilon$$

Nous obtenons un bon fit de l'ensemble des données à 30 MeV avec la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} W_o = 7.8 \\ W_d = 2.9 + 10.\varepsilon \\ a_I = 0.51 + 0.7\varepsilon \\ R_I = 1.18\ A^{1/3} + 5.\varepsilon \end{cases}$$

Indiquons également une solution possible (voir fig. 16), avec la valeur "conventionnelle" $W_o = 3.9$ MeV :

$$\begin{cases} W_o = 3.9 \\ W_d = 2.6 + 18.\varepsilon \\ R_I = 1.18\ A^{1/3} + 0.5 + 3.\varepsilon \end{cases}$$

b) Etude des données à 60 MeV. Variation des rayons en fonction de l'énergie.

Nous avons fait la même étude à partir des mesures σ_R(60 MeV), pour la valeur W_o = 6.6 MeV indiquée par Menet, et pour une valeur plus élevée W_o = 11.4 MeV. Cette fois, les mesures sur C^{12} et N_i^{58} ne permettent pas d'éliminer l'une des valeurs de W_o. La valeur W_o = 6.6 MeV semble favorisée, car elle conduit à un espacement plus régulier des droites représentant les classes $\mathcal{E}$ = 0, 0.1, 0.2.

On remarque que, quel que soit le choix des paramètres (W_o, W_d, etc...) il n'est pas possible de conserver les mêmes rayons R_I à 30 et 60 MeV ; cela correspond d'ailleurs au résultat qu'on avait déjà obtenu par l'étude semi-classique à haute énergie (Section III). Une paramétrisation possible permettant de reproduire les résultats à 60 MeV (fig. 17) est la suivante :

$$\begin{cases} W_o = 6.6 \\ W_d = 2.6 + 3.5\,\mathcal{E} \\ R_I = 1.18\,A^{1/3} + 0.2 + 1.8.\mathcal{E} \\ a_I = 0.51 + 0.7\mathcal{E} \end{cases}$$

c) Représentation des données à 14.5 MeV.

Nous avons obtenu une bonne représentation des sections efficaces à 14.5 MeV (fig. 18) en utilisant les potentiels définis par Becchetti et Greenlees, en particulier :

$$R_I = 1.32\,A^{1/3},\ a_I = 0.51 + 0.7\,\mathcal{E}\ ,\ W_o = 0.49 \text{ MeV}$$

et en choisissant pour l'absorption de surface la forme :

$$W_d = \frac{3}{8} \quad A^{2/3}$$

Nous avons également cherché à représenter les données dans un diagramme (W_d, Δ) (fig. 19). On voit que la valeur de l'absorption de volume W_o = 0.5 MeV indiquée par Becchetti conduit à des résultats totalement incohérents dans ce diagramme : les droites représentatives des noyaux de même ε sont très éloignées les unes des autres, au lieu d'être pratiquement confondues. L'étude que nous avons faite à 30 MeV indique que ces incompatibilités doivent s'atténuer et disparaissent peut être en choisissant une valeur W_o plus élevée. La valeur prévue par la théorie de Goldberger est : W_o (14.5 MeV) $\simeq$ 7 MeV; (Voir fig. 3, Section II).

3) Conclusion.

Nous avons ainsi obtenu une bonne représentation des sections de réaction entre 15 et 60 MeV, améliorant les résultats obtenus par Becchetti et Greenlees (1969) à 14.5 MeV et par Menet et al. (1971), en particulier à 60 MeV.

D'autre part, l'usage de rayons d'absorption reliés aux valeurs directement observées nous a permis de montrer que la partie de volume de l'absorption est probablement considérablement sous-estimée dans les analyses optiques traditionnelles, et que sa valeur exacte est sans doute plus proche de ce que prévoit une théorie élémentaire (exposée en Section II, d'après Goldberger, 1949).

Cette étude laisse subsister néanmoins une indétermination sur la valeur de l'absorption superficielle, du fait que les rayons d'absorption sont mal connus. Il serait intéressant d'avoir une théorie permettant de les calculer de façon à lever cette indétermination : citons le travail de Greenlees, Pyle et Tang (1968) qui relient les rayons d'absorption aux rayons de matière en utilisant la théorie de Goldberger (fig. 20).

La paramétrisation des rayons que nous avons adoptée ici a d'autre part l'avantage de fournir en principe de bons résultats même pour les noyaux dont le rayon ne suit pas la loi en $1.18\ A^{1/3}$; c'est en particulier le cas des noyaux plus légers que le Carbone, dont on sait que les rayons varient très irrégulièrement en fonction de la masse. Il suffit en effet d'introduire la valeur expérimentale du rayon de charge dans la forme $R_I = R_o + \Delta(\mathcal{E})$ pour tenir compte automatiquement de cet effet géométrique. L'application de cette méthode a la détermination des sections de réaction des éléments légers fera l'objet d'un prochain article.

Légende des figures

Fig. 1 et 2 : Sections efficaces de réaction (σ_R) en fonction de l'énergie, entre 15 et 100 MeV, d'après les résultats expérimentaux cités dans le texte. Les courbes tracées ne sont pas le résultat d'un calcul, et servent uniquement à relier les points expérimentaux.

Fig. 3 à 7 : Sections efficaces σ_R en fonction de $A^{2/3}$, à diverses énergies (respectivement : 10, 16.4, 29, 61 et 100 MeV). Les courbes tracées sont le résultat de notre calcul de modèle optique avec absorption de volume uniquement (potentiel W_o). La géométrie utilisée est celle qui a été déterminée par Fricke (1967) : $R_I = 1.37\ A^{1/3}$, $a_I = 0.63$, et la partie réelle du potentiel est celle de Fulmer et Ball (1969).

Fig. 8 : Absorption de volume W_o pour les éléments légers (C et Al) et "opacité" correspondante : $K = 2\ W_o/v$, en fonction de l'énergie, d'après l'analyse optique précédente (fig. 3 à 7). On a représenté également l'opacité (K_G) prévue par la théorie de Goldberger pour une énergie de Fermi $E_F = 2($ Me

Fig. 9a : Variations de σ_R pour diverses séries d'isotopes (Fe, Ni, Cu, Zn, Zr, Sn), mesurées par Dicello, Igo et Roush (1967) à 14.5 MeV. Les variations sont souvent plus rapides que celles de σ_R (A) le long de la vallée de stabilité .

Fig. 9b : Id., d'après Becchetti et Greenlees (1969), pour les mêmes isotopes de Fe, Ni, Cu, Zn, Zr; les droites tracées représentent les prédictions de leur modèle optique.

Fig. 10 : Variations de σ_R pour les isotopes de Fe et Ni, mesurées par Menet et al (1971) à 60 MeV. La droite en trait plein représente la pente moyenne de σ_R (A) le long de la vallée de stabilité.

Fig. 11, 12 et 13 : Paramètres du potentiel imaginaire obtenus par Becchetti et Greenlees (B.) à basse énergie et par Menet et al. (M.) à plus haute énergie, pour diverses valeurs de $\xi = (N-Z)/A$. Les fig. 11, 12 et 13 représentent respectivement l'épaisseur de surface a_I, l' "intensité" de l'absorption superficielle : $a_I \cdot W_d$, et l'absorption de volume W_o, en fonction de l'énergie. Sur la fig. 13 , on a indiqué également l'absorption de volume prédite par le modèle de Goldberger (G.) pour une énergie de Fermi $E_F = 40$Me

Fig. 14 a et b : "Diagramme (W_d ,Δ)" pour C^{12} et Ni^{58}, pour une absorption "normale" W_o = 3.9 MeV (fig. 14 a) et pour une absorption plus forte W_o=7.8MeV (fig. 14 b) (E_p = 30 MeV)

Dans ce qui suit, les rayons d'absorption sont supposés de la forme : $R_I = R_o + \Delta$, avec : $R_o = 1.18\ A^{1/3} - 0.48$ (Hofstadter, 1967). Les courbes tracées correspondent à des valeurs de σ_R fixées : respectivement 420 mb. et 1010 mb. pour C^{12} et Ni^{58} (valeurs mesurées). Les noyaux C^{12} et Ni^{58} correspondent à des valeurs de ξ égales ou voisines de zéro : ils doivent donc être représentés par le même point dans un diagramme (W_d , Δ). Ceci n'est pas possible pour W_o = 3.9 (fig. 14 a), mais devient possible compte tenu des incertitudes expérimentales pour W_o = 7.8 MeV (fig. 14 b).

Fig. 15 a et b : Diagrammes (W_d , Δ) pour des noyaux de $\xi \simeq 0.1$ (Ti^{49} et Zr^{89}) (E_p = 30 MeV). Les valeurs W_o = 3.9 MeV (fig. 15 a) et W_o = 7.8 MeV (fig. 15 b) sont toutes deux compatibles avec les mesures (respectivement 1090 mb et 1390mb pour ces deux noyaux.)

Fig. 16 : Résultats de nos calculs pour les deux paramétrisations suivantes (E_p = 30 MeV) :

a) $W_o = 3.9$ MeV , $a_I = 0.51 + 0.7\ \xi$, $W_d = 2.6 + 18.\ \xi$,
$R_I = 1.18\ A^{1/3} + 0.5 + 3.\ \xi$

b) $W_o = 7.8$ MeV , $a_I = 0.51 + 0.7\ \xi$, $W_d = 2.9 + 10.\ \xi$,
$R_I = 1.18\ A^{1/3} + 5.\ \xi$

Nous avons représenté également les valeurs expérimentales de Menet et al. ($\frac{1}{1}$) et indiqué par une simple croix (×) les valeurs lues sur les figures 1 et 2 . Les noyaux C^{12}, O^{16}, Al^{27}, Ca^{40}, Ni^{58} ont des valeurs de ξ voisines de 0 ; pour les noyaux Zn^{68}, Zr^{90} : $\xi \simeq 0.1$; pour Sn^{120} : $\xi = 0.16$; pour Pb^{208}, $\xi = 0.21$.

On voit que le modèle a (traits pleins) donne des résultats systématiquement trop bas pour les noyaux $\xi = 0$; ce résultat est corrigé en partie dans le modèle b (tirets). Les deux modèles fournissent des résultats très voisins pour les valeurs de ξ plus élevées.

Fig. 17 : Résultat de notre calcul à 60 MeV , avec les paramètres suivants :
$W_o = 6.6$ MeV , $a_I = 0.51 + 0.7\ \xi$, $W_d = 2.6 + 3.5\ \xi$,
$R_I = 1.18\ A^{1/3} + 0.2 + 1.8\ \xi$

L'accord avec les mesures est satisfaisant.

Fig. 18 : Résultat d'un calcul à 14.5 MeV , en utilisant l'absorption de volume fixée par Becchetti et Greenlees : $R_I = 1.32\ A^{1/3}$, $a_I = 0.51 + 0.7\ \xi$ $W_o = 0.49$ MeV ; nous obtenons un bon accord avec les résultats expérimentaux en introduisant une absorption superficielle $W_d = 3/8 . A^{2/3}$

Fig. 19 : Diagramme (W_d , Δ) à 14.5 MeV , pour la valeur de l'absorption de volume indiquée par Becchetti et Greenlees : $W_o = 0.49$ MeV . On voit que les droites représentatives des noyaux de la même "classe" ξ sont loin d'être confondues. Ceci suggère que la valeur correcte de W_o est peut-être beaucoup plus élevée (la valeur prévue par la théorie de Goldberger est : 7 MeV).

Fig. 20 : D'après Greenlees, Pyle et Tang (1968). Comparaison des potentiels W(r) phénoménologiques (W_{OM} , déduits des analyses optiques) et des potentiels calculés à l'aide de la théorie de Goldberger (W_{calc}). Les calculs semblent capables d'indiquer les rayons d'absorption et la forme de la surface avec précision, bien que l'intensité du potentiel calculé soit généralement trop forte, surtout dans la région centrale.

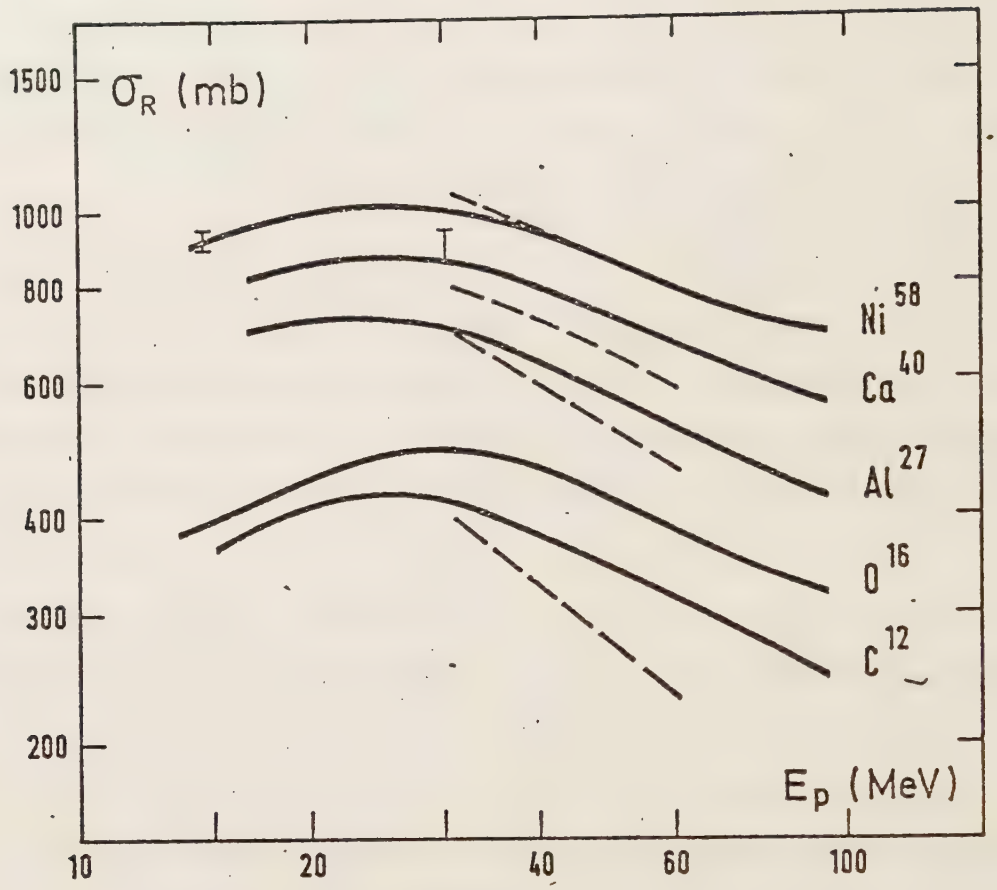

1500
σ_R (mb)
1000
800
600
400
300
200
Ni 58
Ca 40
Al 27
O 16
C 12
E_p (MeV)
10
20
40
60
100

Fig. 1

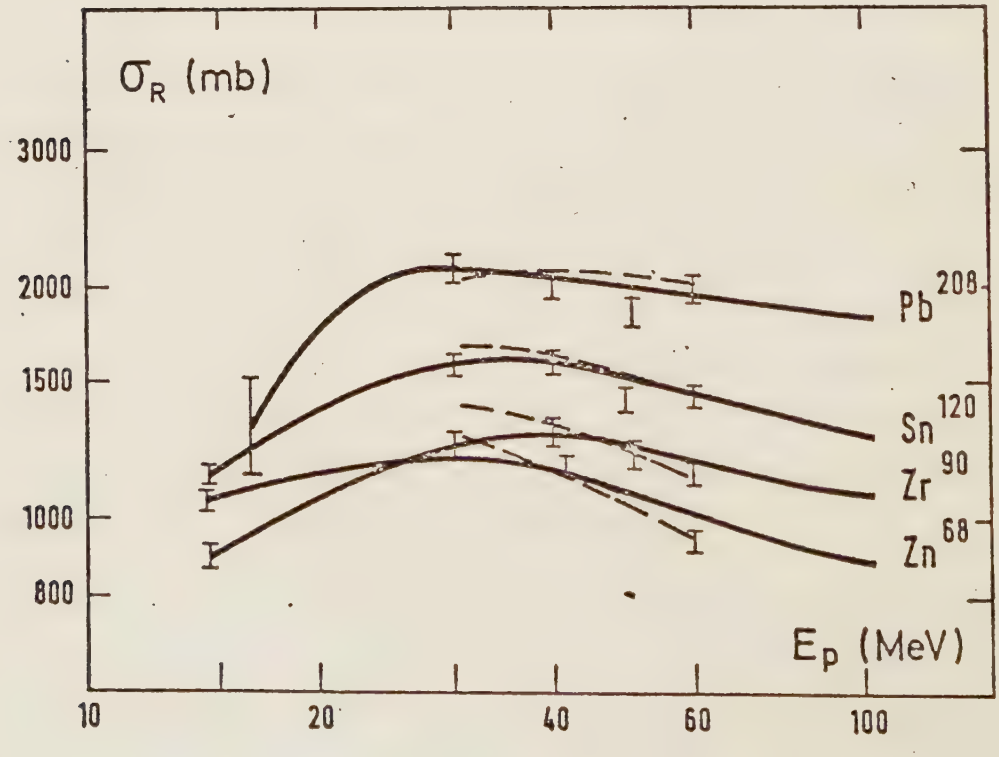

σ_R (mb)
3000
2000
1500
1000
800
Pb 208
Sn 120
Zr 90
Zn 68
E_p (MeV)
10
20
40
60
100

Fig. 2

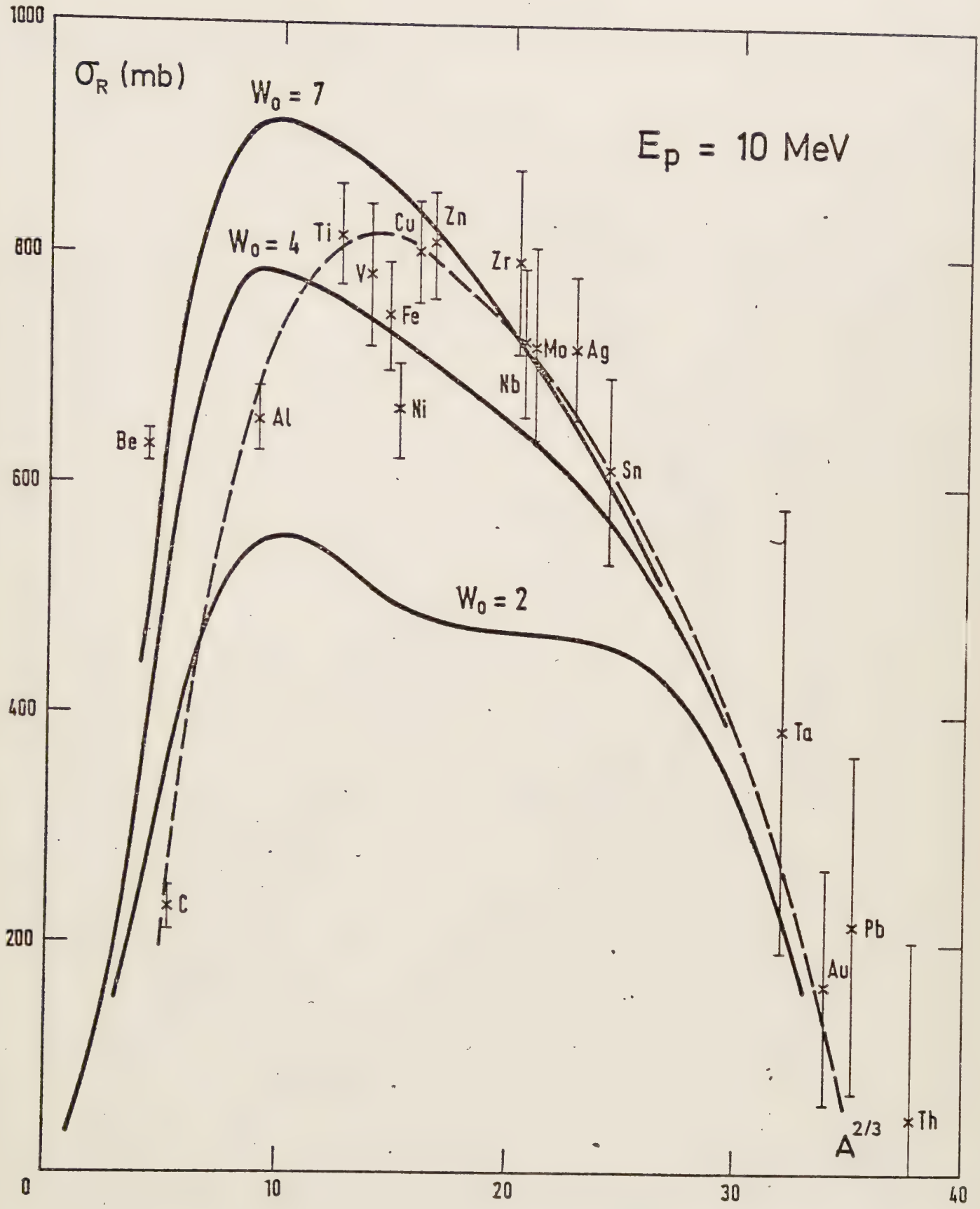

1000
800
600
400
200
0
10
20
30
40
σ_R (mb)
$W_0 = 7$
$W_0 = 4$
$W_0 = 2$
E_p = 10 MeV
Be
C
Al
Ti
V
Cu
Zn
Fe
Ni
Zr
Nb
Mo
Ag
Sn
Ta
Au
Pb
Th
$A^{2/3}$

Fig. 3

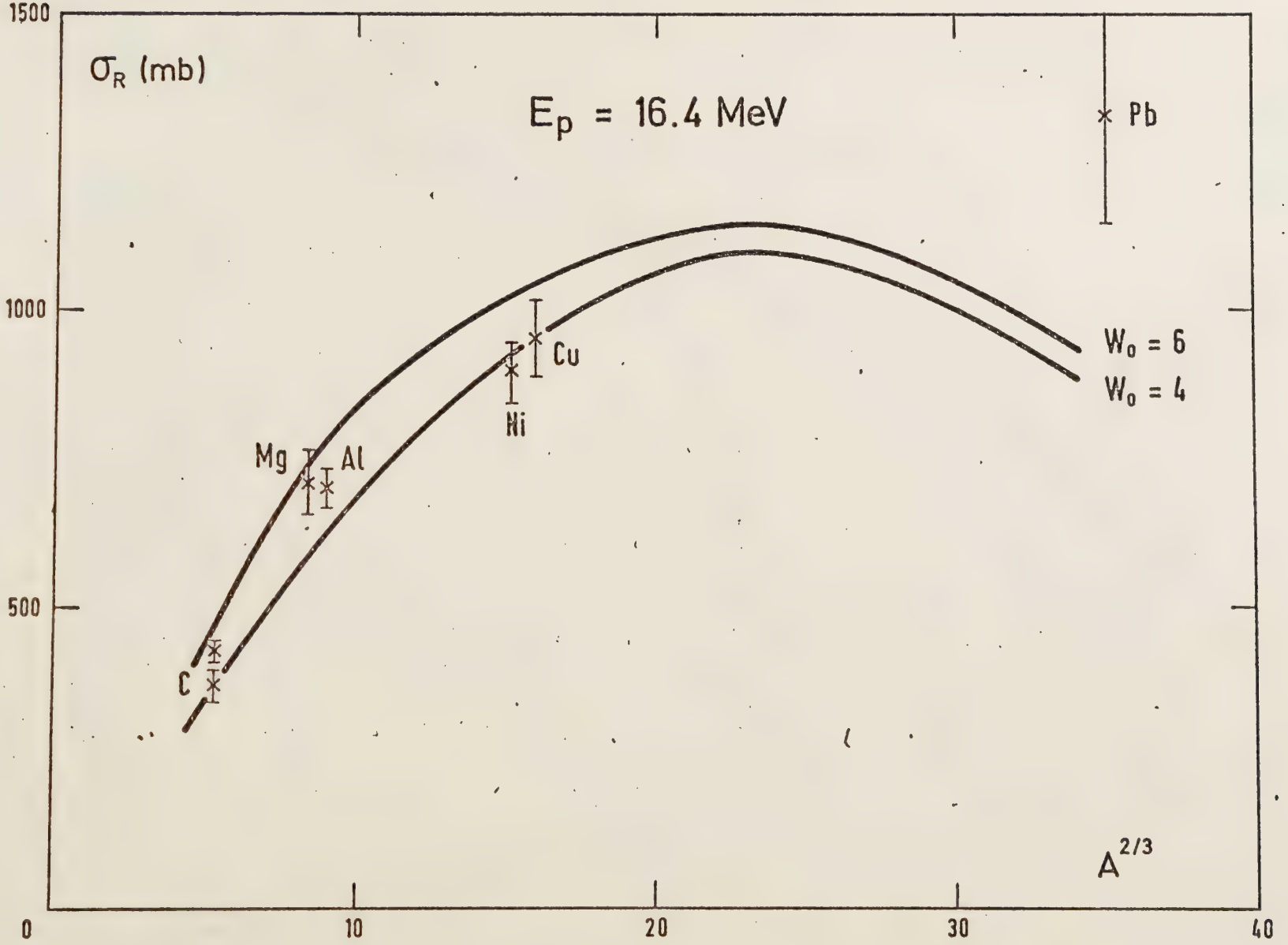

1500
σ_R (mb)
E_p = 16.4 MeV
Pb
1000
W_0 = 6
W_0 = 4
Cu
Ni
Mg
Al
500
C
0
10
20
30
40
$A^{2/3}$

Fig. 4

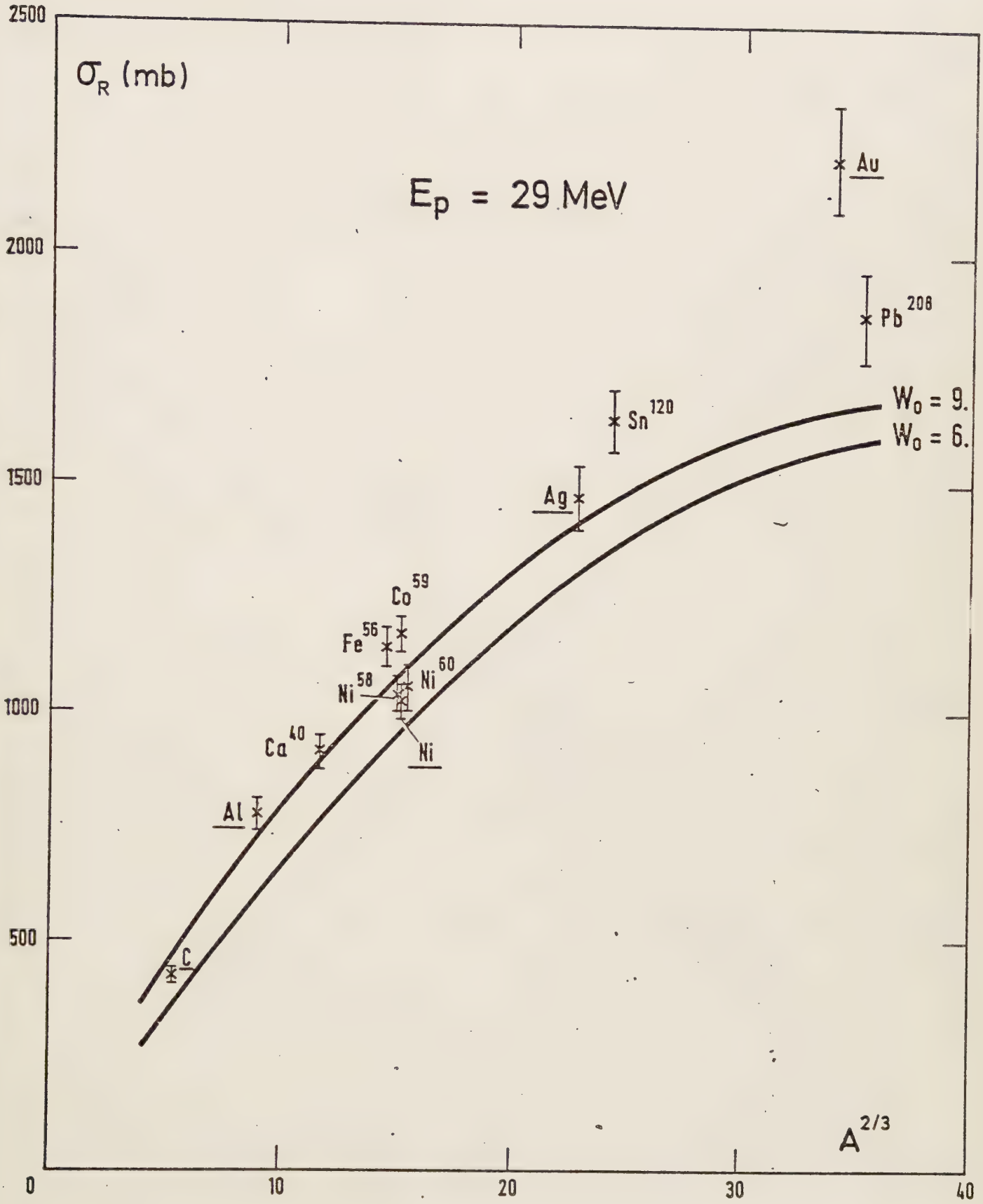

2500
σ_R (mb)
E_p = 29 MeV
2000
1500
1000
500
0
10
20
30
40
$A^{2/3}$
Au
Pb 208
Sn 120
Ag
Co 59
Fe 56
Ni 58
Ni 60
Ni
Ca 40
Al
C
W_0 = 9.
W_0 = 6.

Fig. 5

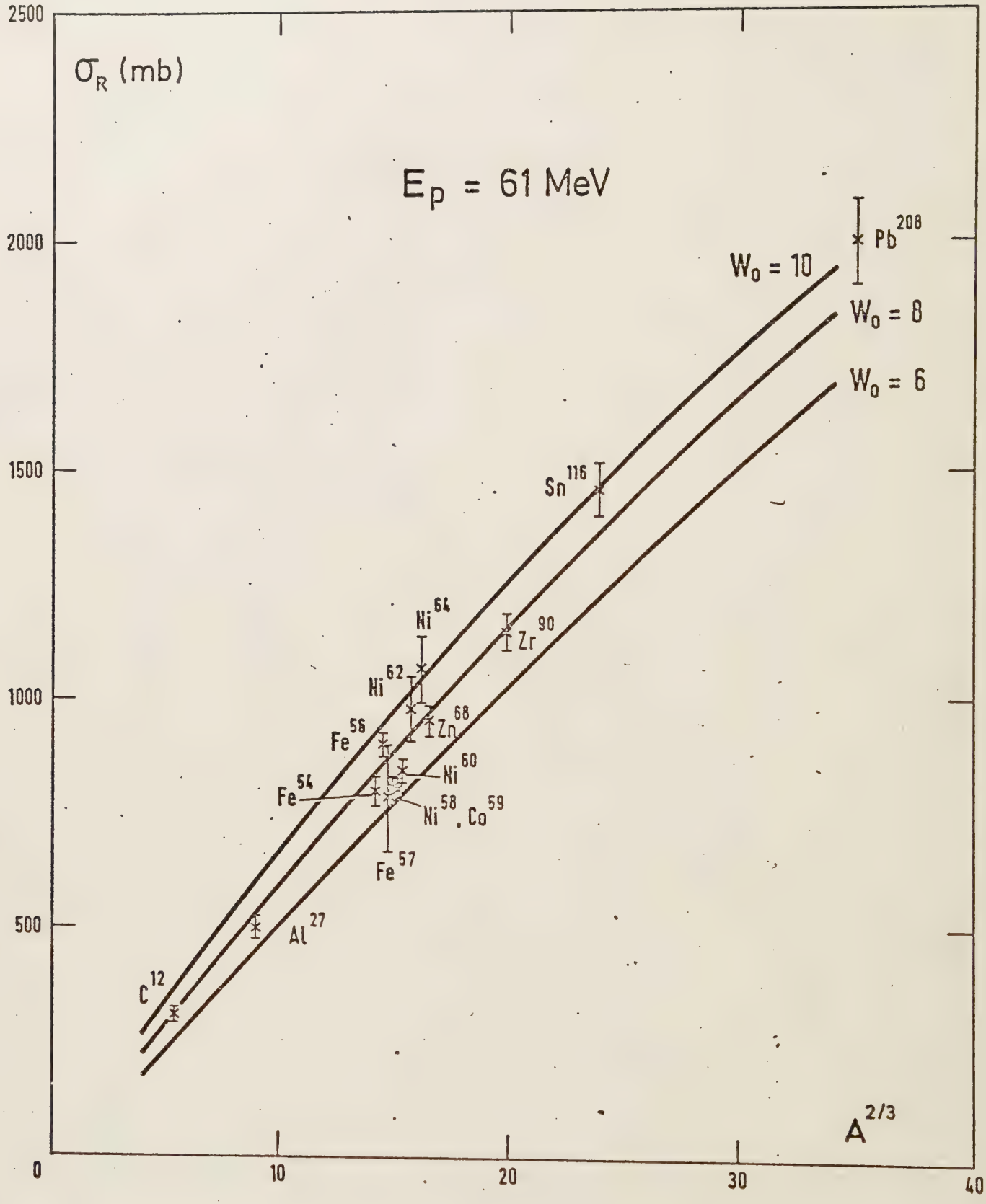

2500
2000
1500
1000
500
0
σ_R (mb)
E_p = 61 MeV
W_0 = 10
W_0 = 8
W_0 = 6
Pb^{208}
Sn^{116}
Zr^{90}
Ni^{64}
Ni^{62}
Zn^{68}
Fe^{56}
Ni^{60}
Fe^{54}
Ni^{58}, Co^{59}
Fe^{57}
Al^{27}
C^{12}
10
20
30
40
$A^{2/3}$

Fig. 6

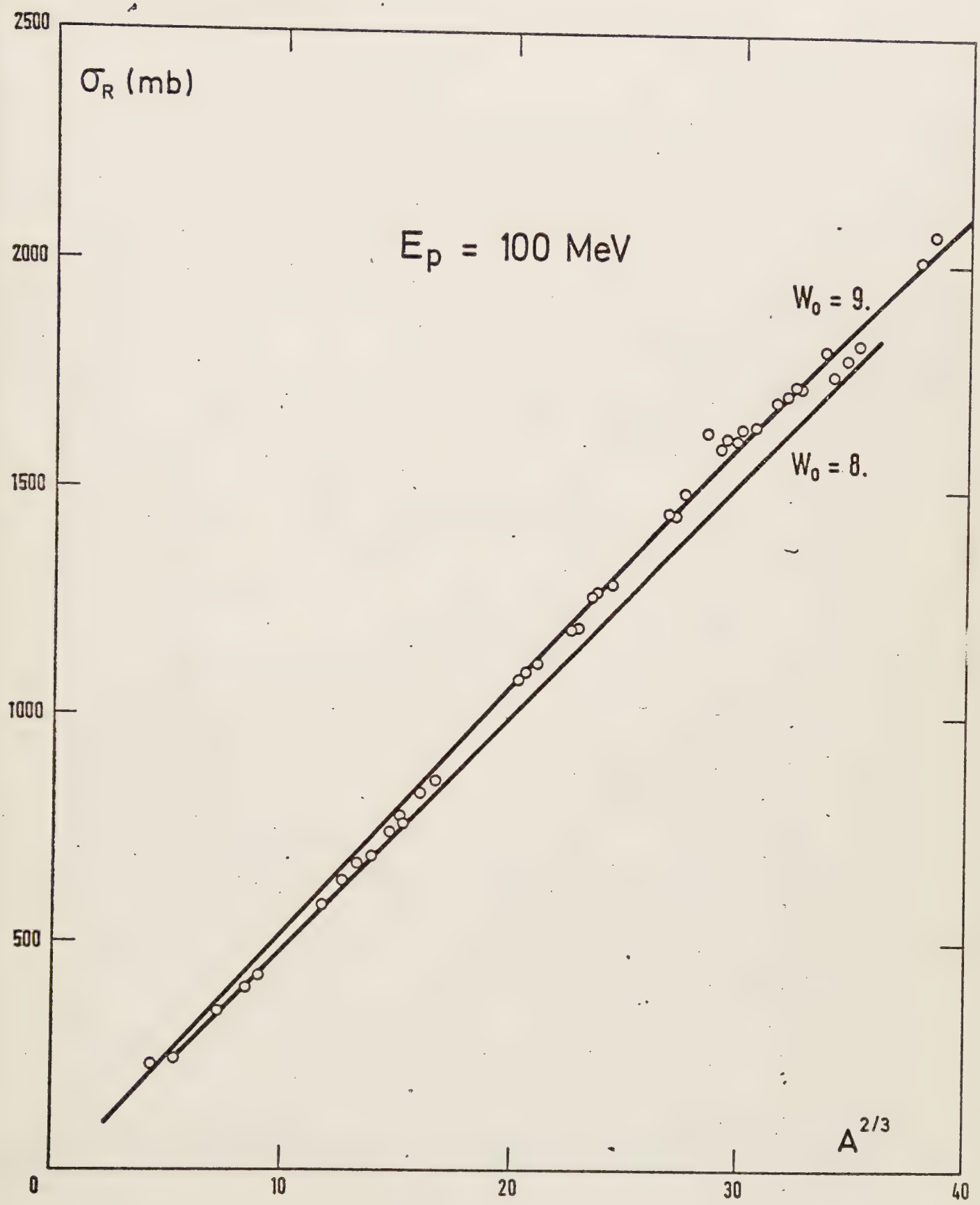

2500
σ_R (mb)
2000
E_p = 100 MeV
W_0 = 9.
W_0 = 8.
1500
1000
500
0
10
20
30
40
$A^{2/3}$

Fig. 7

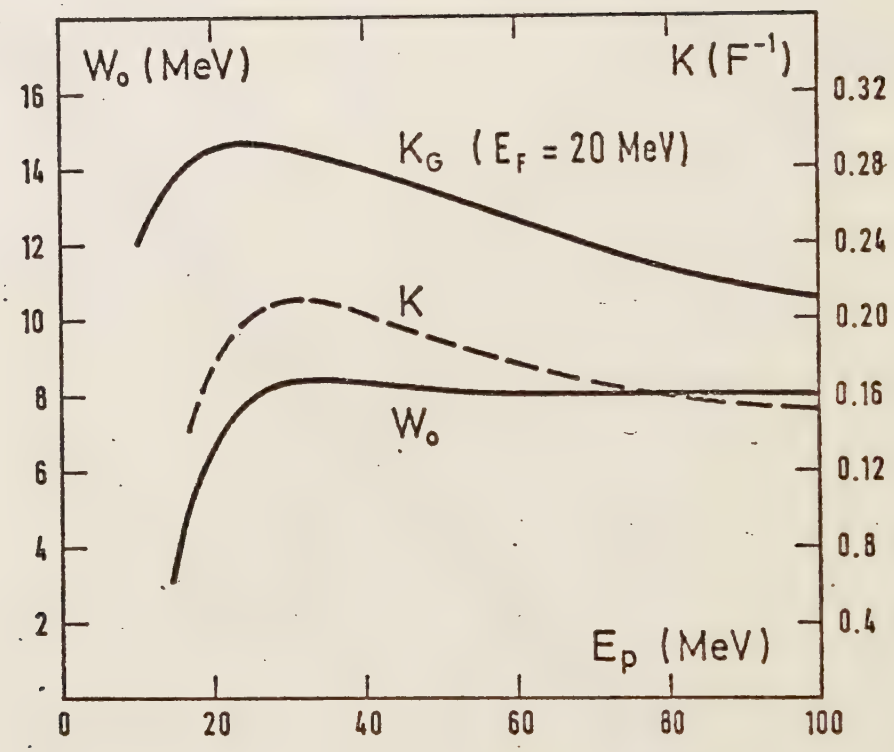
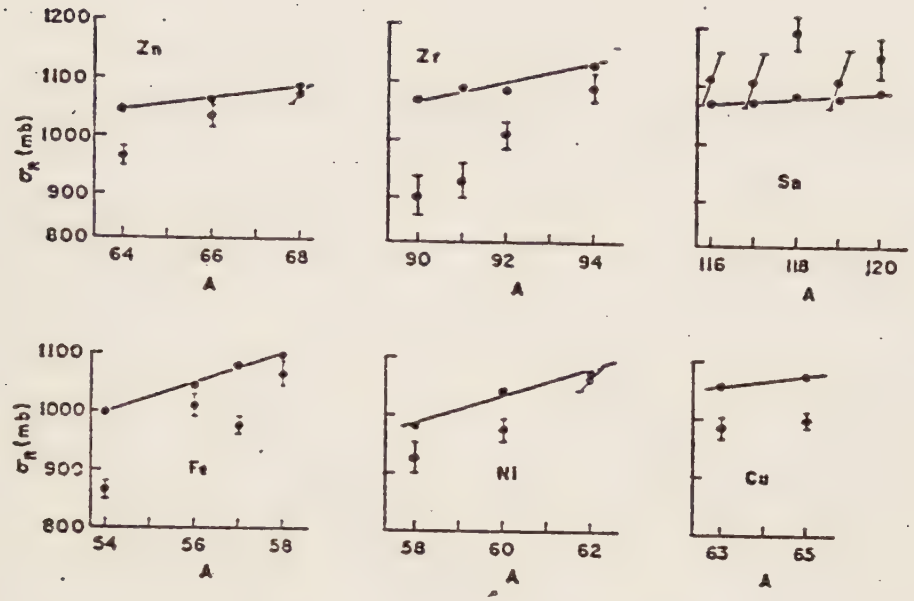

W₀ (MeV)
K (F⁻¹)
K_G (E_F = 20 MeV)
K
W₀
E_p (MeV)
16
14
12
10
8
6
4
2
0.32
0.28
0.24
0.20
0.16
0.12
0.8
0.4
0
20
40
60
80
100

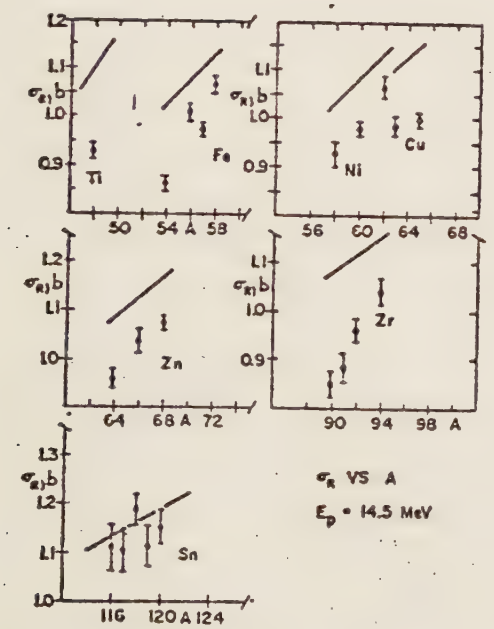
Fig. 8



The total reaction cross sections as a function of atomic mass. The points without error bars are the values obtained from optical-model calculations. The points with error bars represent the values obtained from this experiment.

Fig. 9a

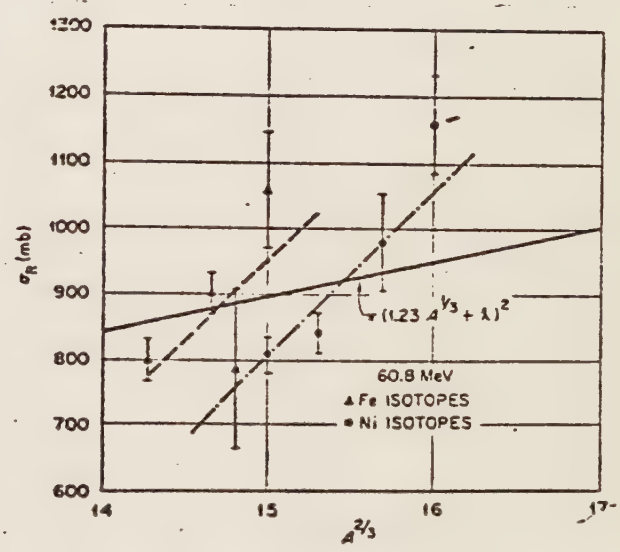
(d'après Dicello et al., 1967)



Comparison of the reaction cross-section predictions for isotopic sequences with experimental values using the proton best-fit parameters (Ref. 15).

Fig. 9b

(d'après Becchetti et al., 1969)



Fe and Ni isotope data at 60.8 MeV plotted as a function of $A^{2/3}$. The solid line shows the trend of the data for a large mass range from Fig. 7(d), while the broken lines show the trends for the Fe and Ni isotopes.

Fig. 10

(d'après Menet et al., 1971)

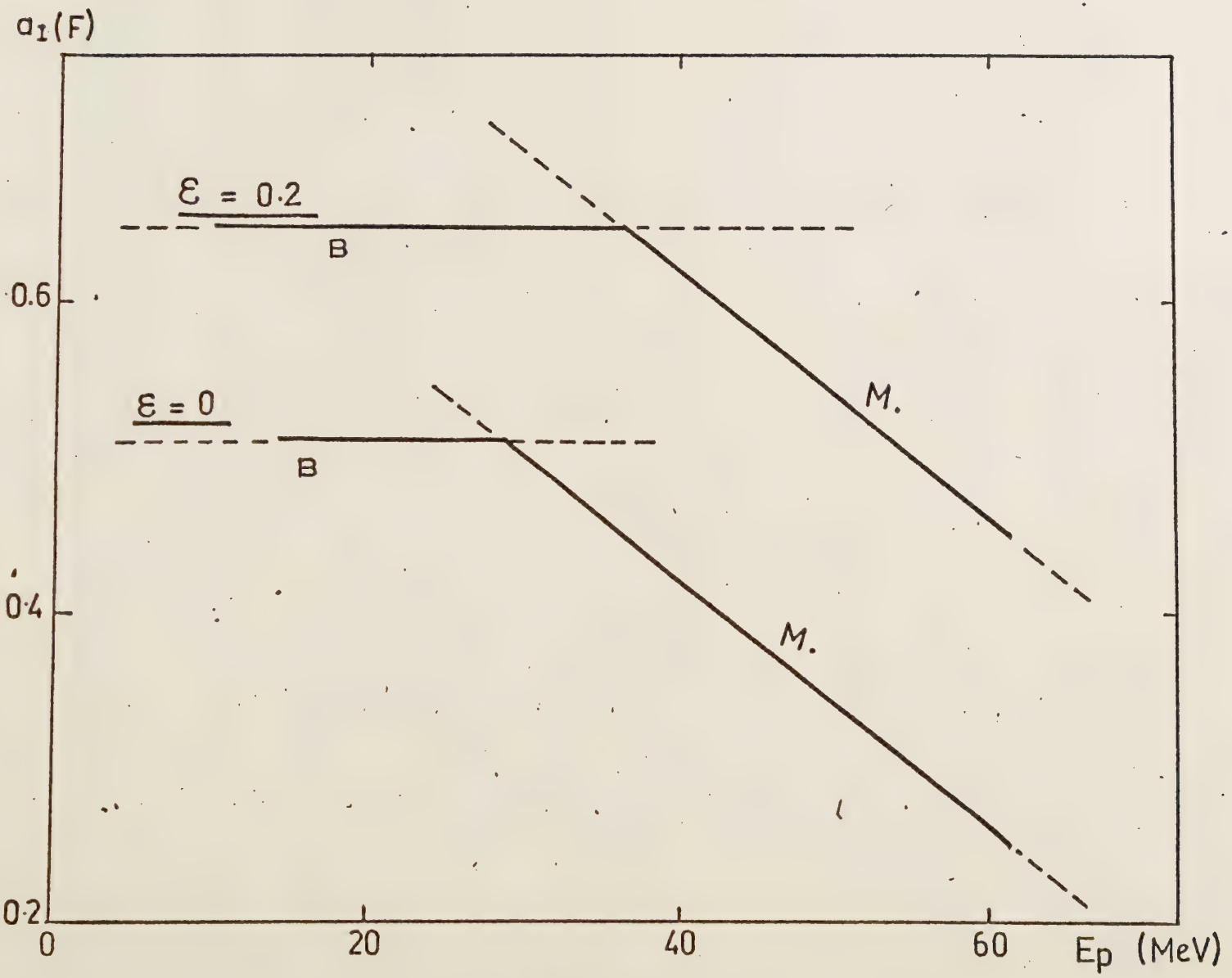


Fig – 11

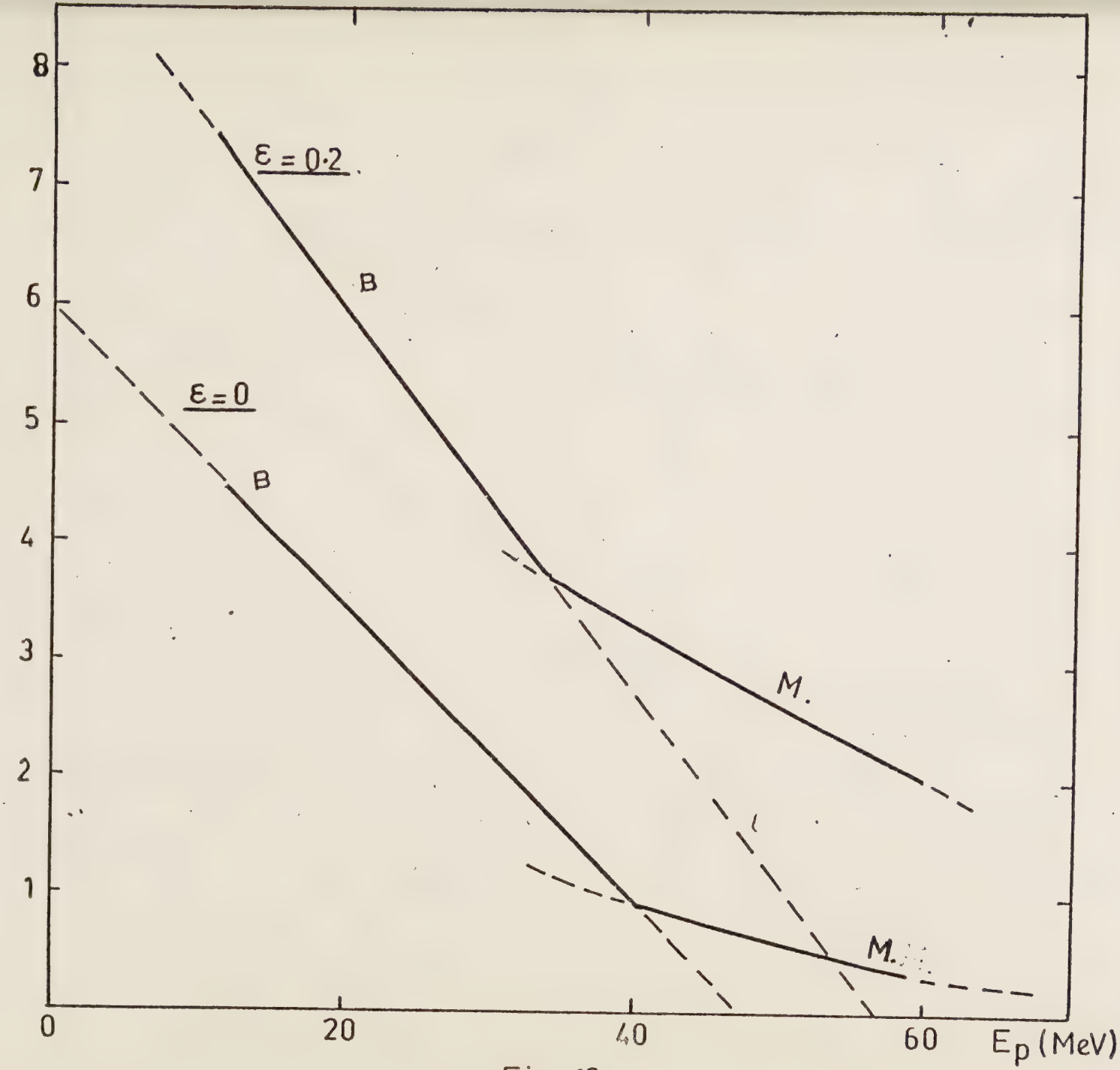


Fig - 12

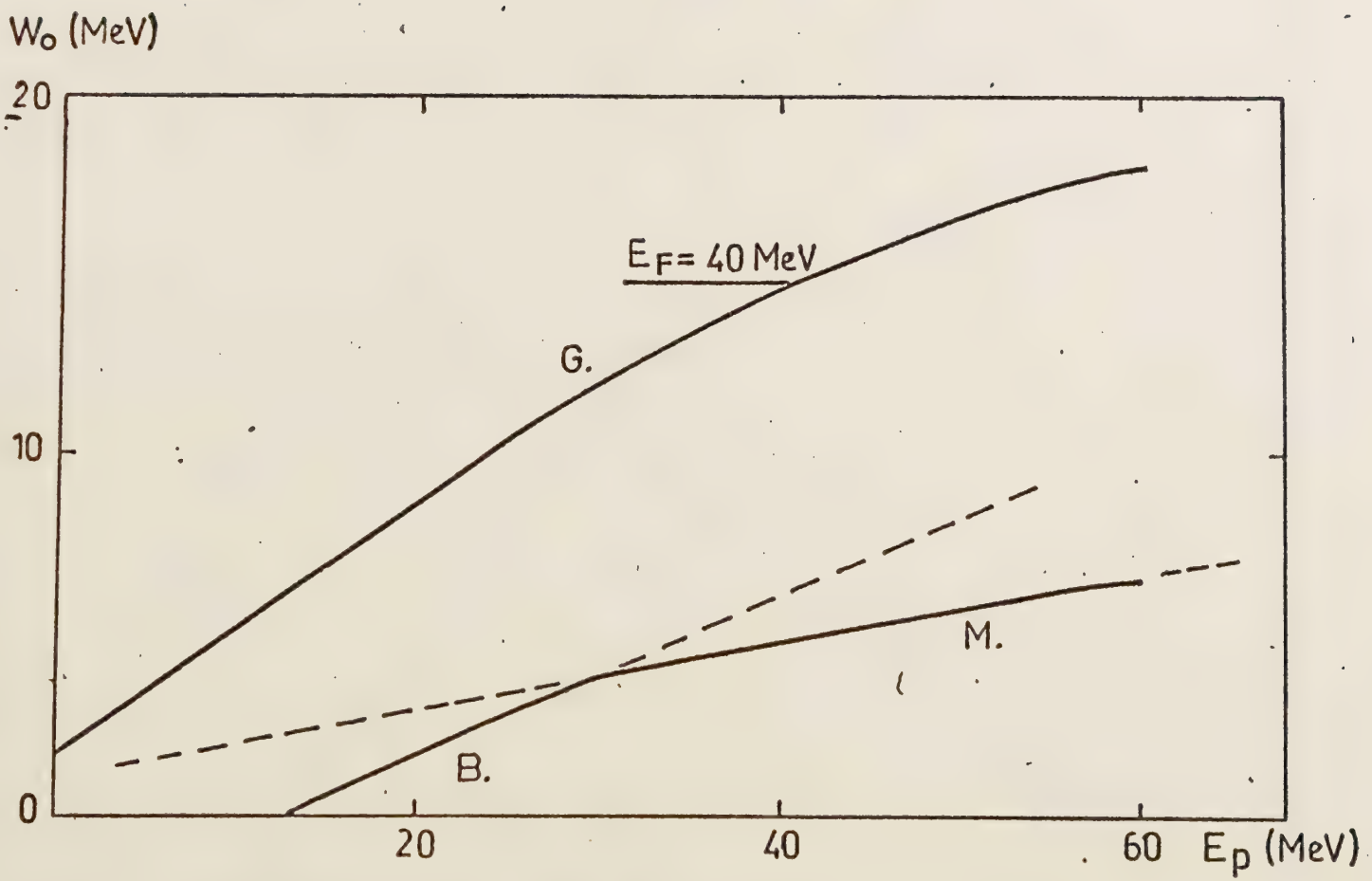


Fig-13

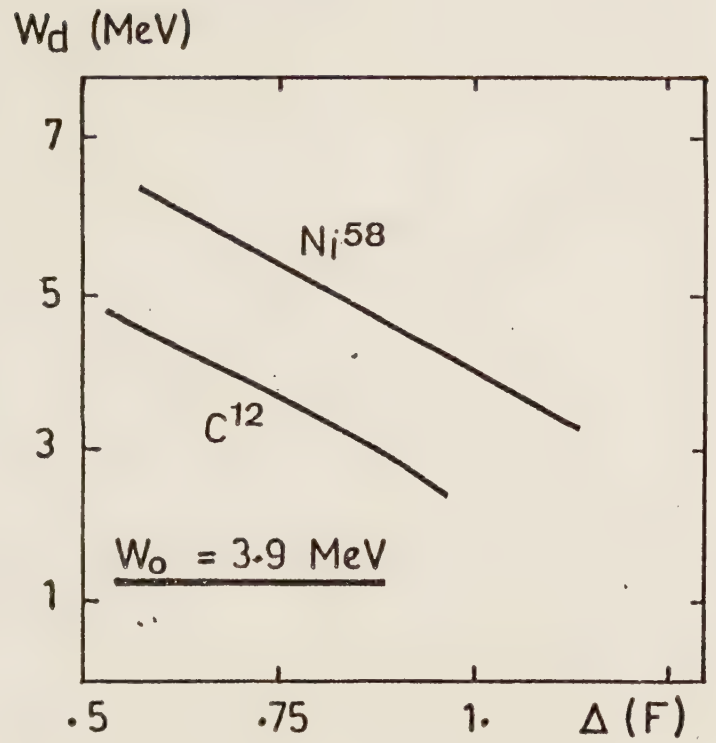


Fig-14a

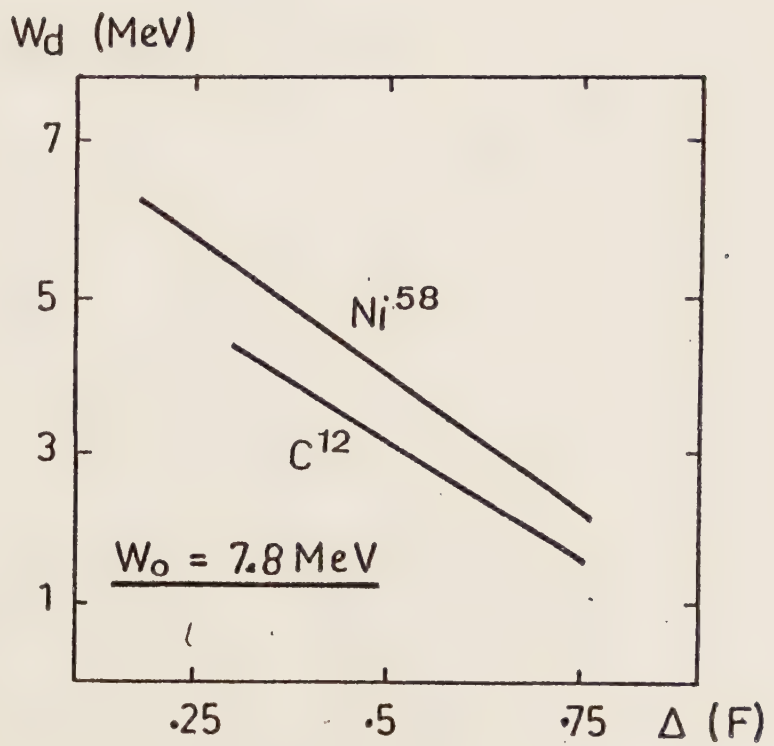


Fig 14b

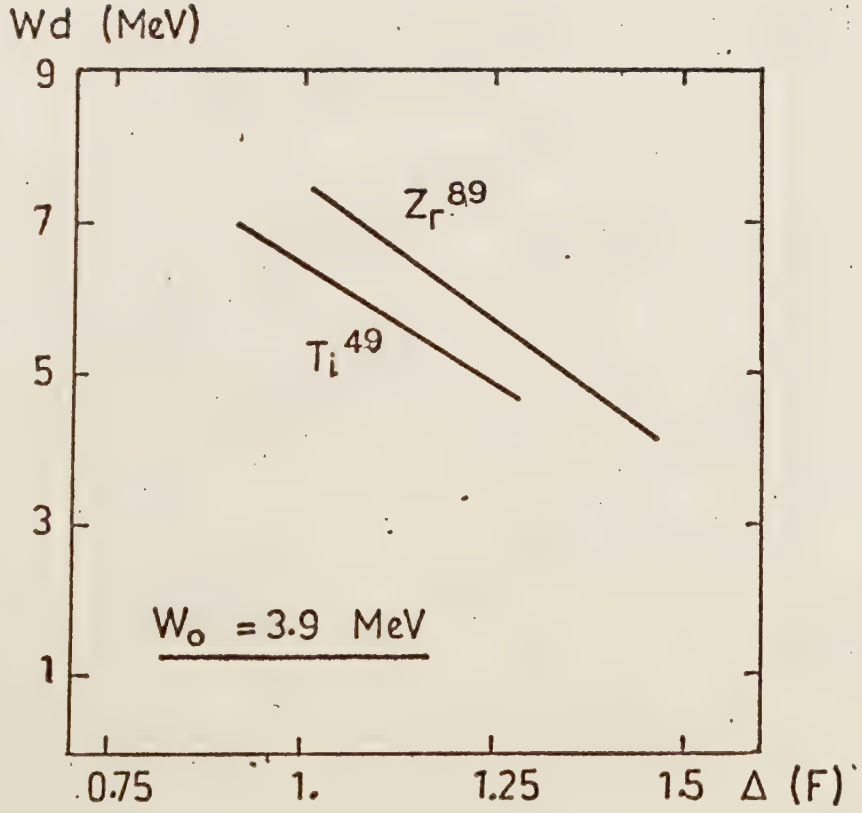


Fig - 15 a

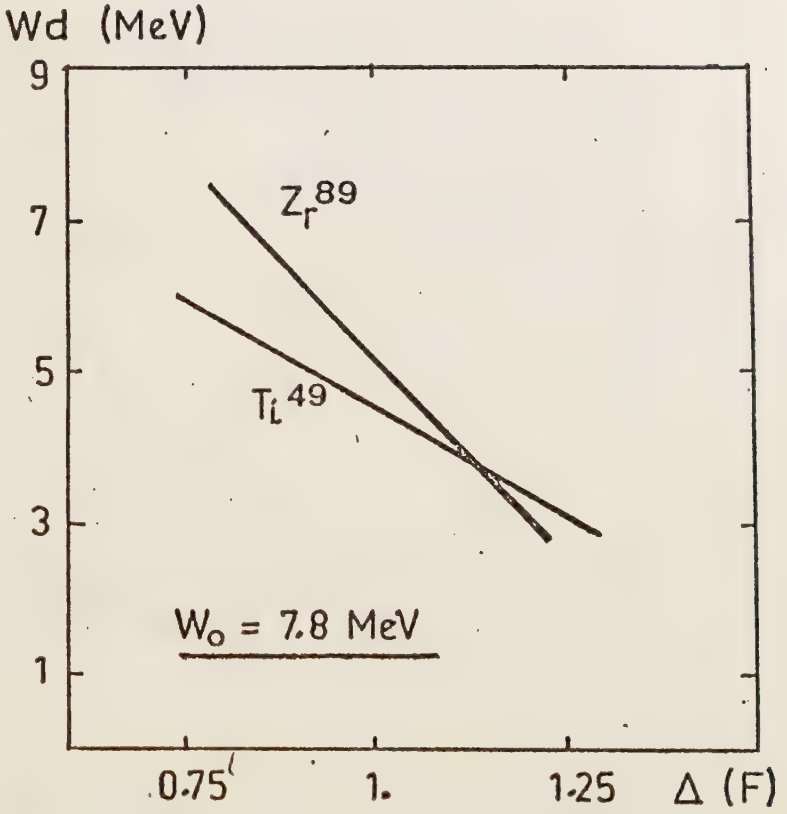


Fig - 15 b

(barns)

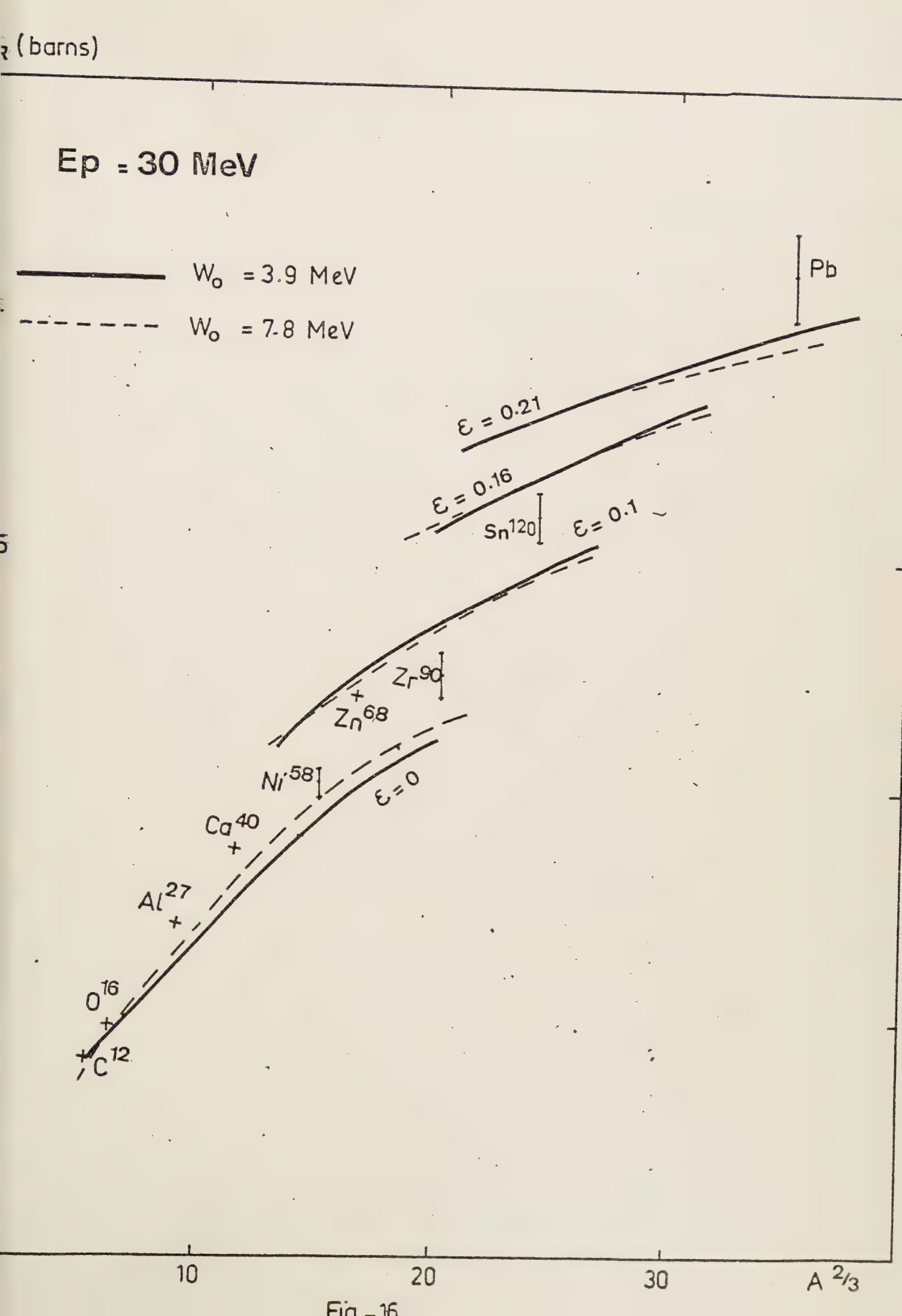

Ep = 30 MeV
W_o = 3.9 MeV
W_o = 7.8 MeV
Pb
ε = 0.21
ε = 0.16
Sn^{120}
ε = 0.1
Zr^{90}
Zn^{68}
Ni^{58}
ε = 0
Ca^{40}
Al^{27}
O^{16}
C^{12}
10
20
30
$A^{2/3}$

Fig. 16

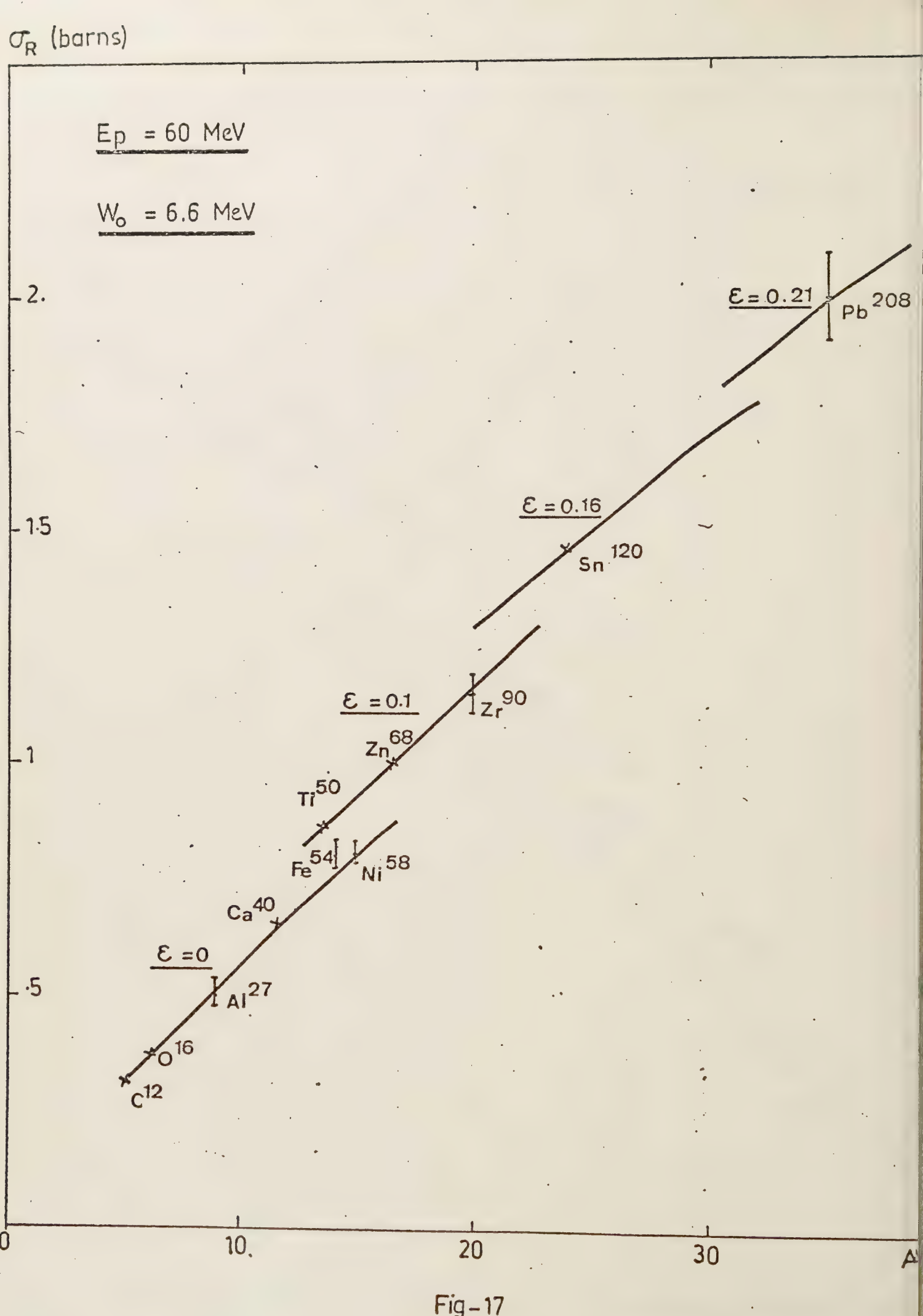

σ_R (barns)
Ep = 60 MeV
W_o = 6.6 MeV
2.
1.5
1
.5
0
10.
20
30
A
ε = 0.21
Pb 208
ε = 0.16
Sn 120
ε = 0.1
Zr 90
Zn 68
Ti 50
Fe 54
Ni 58
Ca 40
ε = 0
Al 27
O 16
C 12

Fig-17

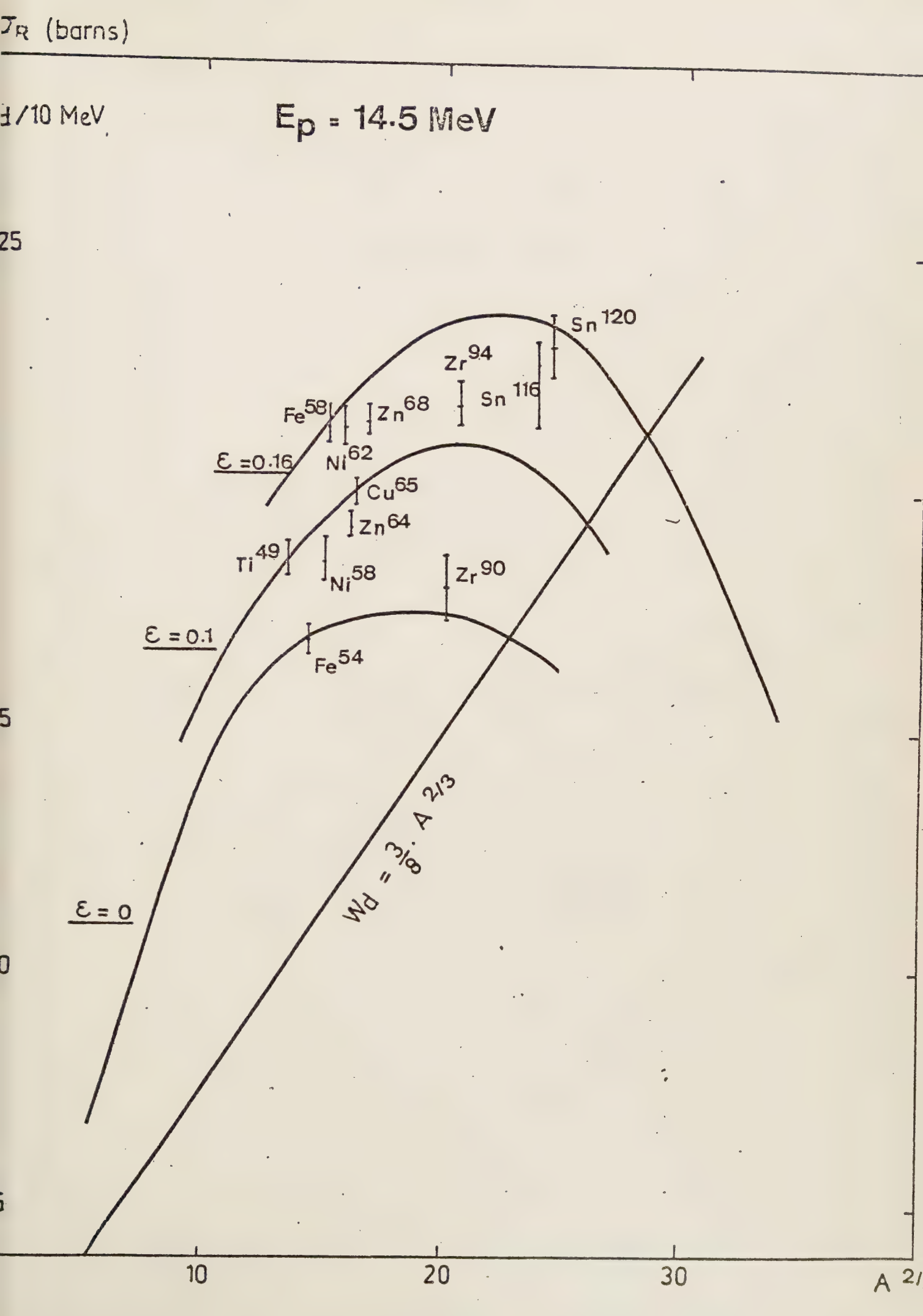

σ_R (barns)
E/10 MeV
E_p = 14.5 MeV
25
5
0
10
20
30
A 2/
Sn^{120}
Zr^{94}
Sn^{116}
Fe^{58}
Zn^{68}
Ni^{62}
ε =0.16
Cu^{65}
Zn^{64}
Ti^{49}
Ni^{58}
Zr^{90}
ε = 0.1
Fe^{54}
ε = 0
$Wd = 3/8 \cdot A^{2/3}$

Fig -18

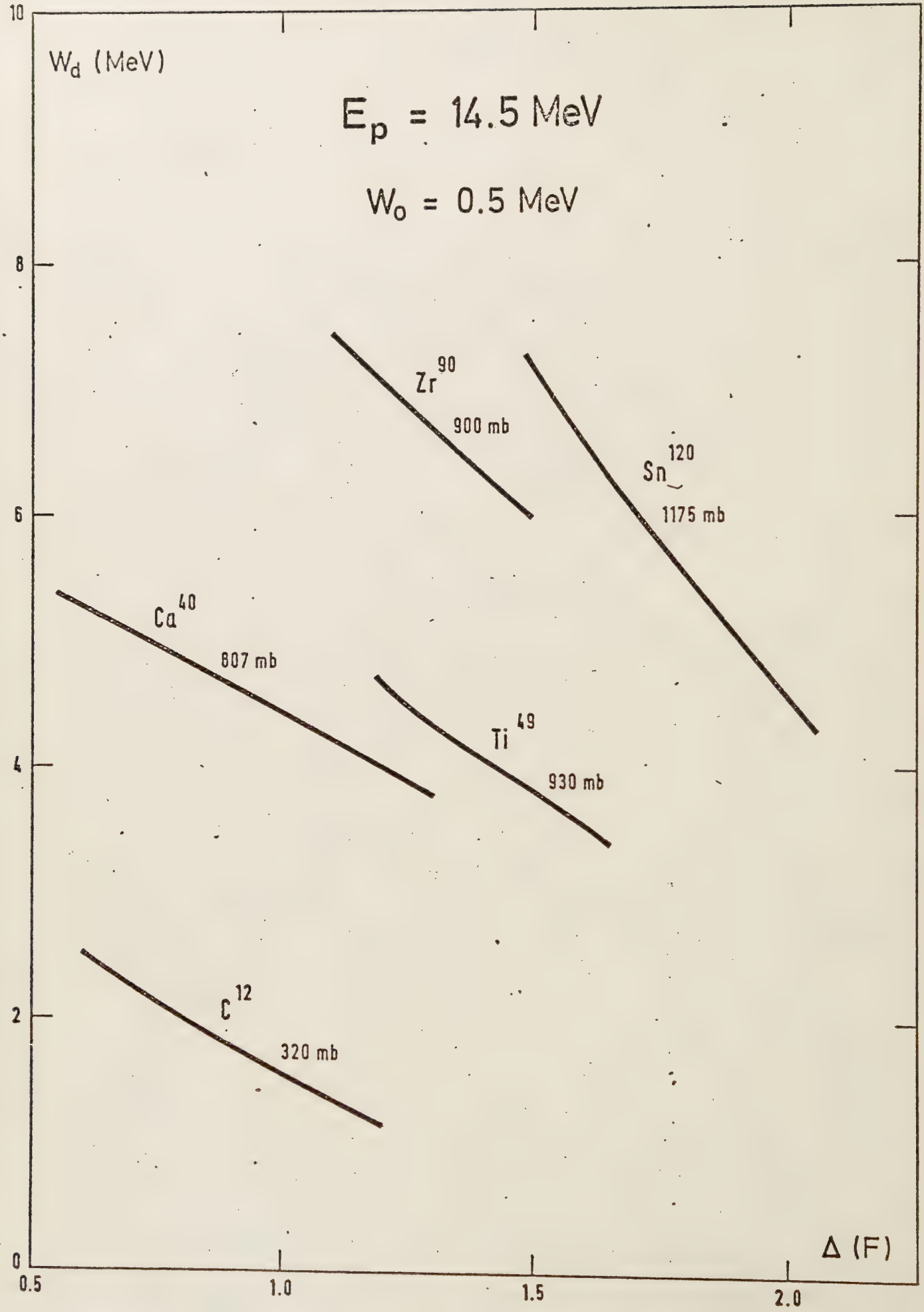
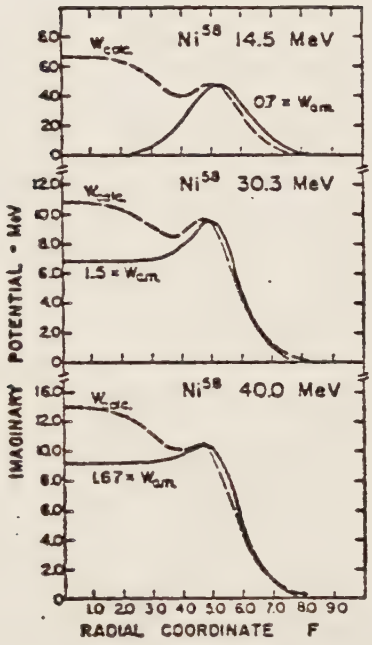

W_d (MeV)
E_p = 14.5 MeV
W_o = 0.5 MeV
Zr^{90}
900 mb
Sn^{120}
1175 mb
Ca^{40}
807 mb
Ti^{49}
930 mb
C^{12}
320 mb
Δ (F)
10
8
6
4
2
0
0.5
1.0
1.5
2.0

Fig. 19



Comparison of radial variation of the imaginary potential for Ni^{58} at 14.5, 30.3, and 40 MeV, obtained (1) phenomenologically (W_{om}) and (2) by calculation from nucleon-nucleon cross-section data (W_{calc}, see text). The phenomenological curves have been normalized to make the surface peak heights equal.

Fig. 20

((d'après Greenlees, Pyle et Tang)

R E F E R E N C E S

Becchetti, F.D. et Greenlees, G. W.: PR 182, 1190 (1969)
Beiner : Int. Course on Nuclear Theory", Trieste (1969)

Bellettini, G., Cocconi , G., Diddens, A. N., Lillethun, E., Matthiac, G., Scanlon, J. P. et Wetherell, A. M.: NP 79 , 609 (1966)

Bethe, H. A.: PR 57 , 1125 (1940)

Bjorklund, F. et Fernbach, S.: PR 109 , 1295 (1958)

Brissaud, I., Le Bornec, Y., Tatischeff, B., Bimbot, L., Brussel, M. K. et Duhamel, G.: NP A191 , 145 (1972)

Cassels, J. M. et Lawson, J. D.: Proc. Phys. Soc. 67 , 125 (1954)

Clementel, E. et Villi, C.: Nuovo Cimento 2 , 176 (1955)

Dicello, J. F., Igo, G. J. et Roush, M. L.: PR 157 , 1001 (1967)

Dicello, J. F. et Igo, G.: PR C2 , 488 (1970)

Duke, C. B.: PR 129 , 681 (1963)

Elton, L. R. B., in "Nuclear Sizes" (Oxford University Press, London, 1961)

Fernbach, S., Serber, R. et Taylor, T. B.: PR 75 , 1352 (1949)

Fricke, M. P., Gross, E. E., Morton, B. J. et Zucker, A.: PR 156 , 1207 (1967)

Fulmer, C. B., Ball, J. B., Scott, A. et Whiten, M. L.: PR 181 , 1565 (1969)

Gaffet, B.: Thèse de 3° cycle (1971)

Gaffet B.: Rapport "Réactions proton-C^{12}" (non publié)

Goldberger, M. L.: PR 74 , 1269 (1948)

Goloskie, R. et Strauch, K.: NP 29 , 474 (1962)

Gooding, T. J.: NP 12 , 241 (1959)

Greenlees, G. W., Pyle, G. J. et Tang, Y. C.: PR 171 , 1115 (1968)

Hahn, B., Ravenhall, D. G. et Hofstadter, R.: PR 101 , 1131 (1956)

Hayakawa, S., Kawai, M. et Kikuchi, K.: Prog. Theoret. Phys. (Kyoto) 13 , 415 (1955)

Hnidzo, V. et al.: PR C3 , 1560 (1971)

Hofstadter, R., Collard et Elton, L. R. B.: "Nuclear Radii" (1967)

Johansson, A., Svanberg, U. et Sundberg, O.: Arkiv för Fysik 19 , 527 (1961)

Juliusson, E.: 14th Cosmic ray Conf., Munich (1975): Vol. 12, p. 4138

Kikuchi, K. et Kawai, M.: "Nuclear matter and nuclear reactions" (1968) North Holland publishing company, Amsterdam.

Kirkby, P. et Link, W. T.: Canadian Journal of Physics, 44 , 1847 (1966)

Makino, M. Q., Waddel, C. N. et Eisberg, R. M.: NP 50 , 145 (1964)

Makino, M. Q., Waddel, C. N. et Eisberg, R. M.: NP 68 , 378 (1965)

Menet, J. J. H., Gross, E. E., Malanify, J. J. et Zucker, A.: Phys. Rev. Letter: 22 , 1128 (1969)

Menet, J. J. H., Gross, E. E., Malanify, J. J. et Zucker, A.: PR C4 , 1114 (1971)

Metropolis, N., Bivins, R., Storm, M., Miller, J. M., Friedlander, G. et Turkevich, A.: PR 110 , 204 (1958)

Meyer, J. P. et Cassé, M. : 14th Cosmic ray Conf., Munich, Vol. 12, p. 4144

Meyer, J. P. : Astron. and Astrophys. Suppl. 7 , 417 (1972)

Meyer, V., Eisberg, R. M. et Carlson, R. F. : PR 117 , 1334 (1960)

Nodvik, J. S., Duke, C. B. et Melkanoff, M. A. : PR 125 , 975 (1962)

Nolen, J. A. et Schiffer, J. P. : Ann. Rev. Nucl. Sci. (1969): "Coulomb energie

Perey, F. G. : PR 131 , 745 (1963)

Perey, F. G. et Buck, B. : NP 32 , 353 (1962)

Pollock, R. E. et Schrank, G. : PR 140 , B575 (1965)

Renberg, P. U., Measday, D. F., Pepin, M., Schwaller, P., Favier, B. et Richard-Serre, C. : NP A183 , 81 (1972)

Rosen, L., Beery, J. G. et Goldhaber, A. S. : Annals of Physics 34 , 96 (1965)

Swift, A. et Elton, L. R. B. :Phys. Rev. Letters 17, 484 (1966)

Turner, J. F., Ridley, B. W., Cavanagh, P. E., Gard, G. A. et Hardacre, A. G. : NP 58 , 509 (1964)

Watson, B. A., Singh, P. P. et Segel, R. E. : PR 182 , 977 (1969)

Wilkins, B. D. et Igo, G. : PR 129 , 2198 (1963)

Worledge, D. H., Cavaignac, J. F. et Jang, S. :Rapport annuel de l'ISN de Grenoble (1971)